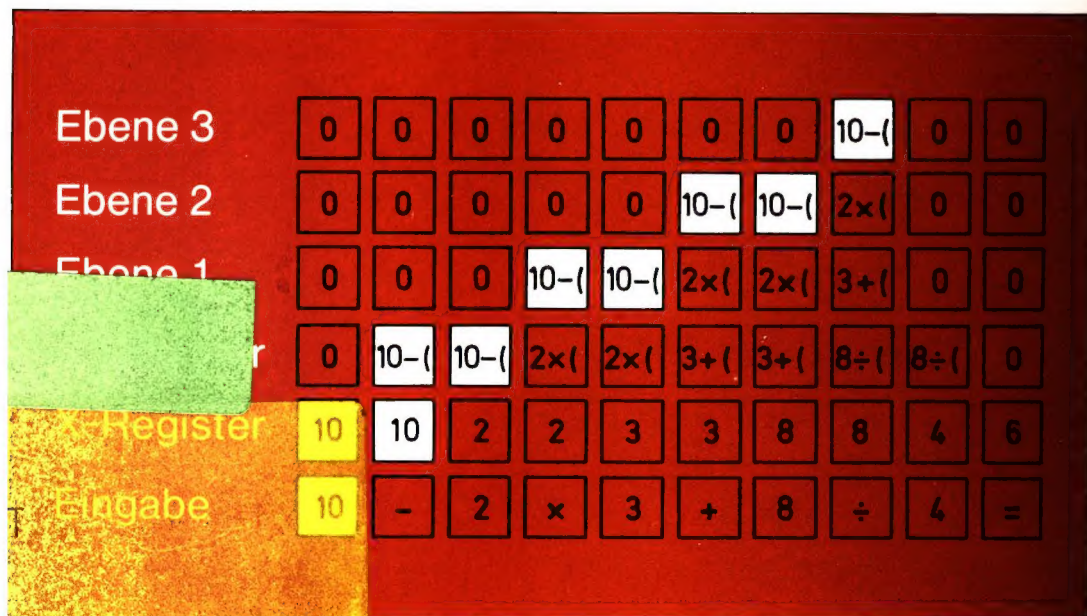


Anwendung programmierbarer Taschenrechner 4

Harald Nahrstedt

Statik – Kinematik – Kinetik für AOS-Rechner

Vieweg



Harald Nahrstedt

Statik – Kinematik –
Kinetik für AOS-Rechner

Anwendung programmierbarer Taschenrechner

- | | |
|-----------|--|
| Band 1 | Angewandte Mathematik – Finanzmathematik – Statistik – Informatik für UPN-Rechner, von H. Alt |
| Band 2 | Allgemeine Elektrotechnik – Nachrichtentechnik – Impulstechnik für UPN-Rechner, von H. Alt |
| Band 3/I | Mathematische Routinen der Physik, Chemie und Technik für AOS-Rechner Teil I, von P. Kahlig |
| Band 3/II | Mathematische Routinen für Physik, Chemie und Technik für AOS-Rechner Teil II, von P. Kahlig |
| Band 4 | Statik – Kinematik – Kinetik für AOS-Rechner, von H. Nahrstedt |
| Band 5 | Numerische Mathematik. Programme für den TI-59, von J. Kahmann |
| Band 6 | Elektrische Energietechnik – Steuerungstechnik – Elektrizitätswirtschaft für UPN-Rechner, von H. Alt |

Anwendung programmierbarer Taschenrechner

Band 4

Harald Nahrstedt

Statik – Kinematik – Kinetik für AOS-Rechner

Mit 30 vollständigen Programmen,
140 Abbildungen und 60 Tabellen



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Nahrstedt, Harald:

Statik, Kinematik, Kinetik für AOS-Rechner/
Harald Nahrstedt. — Braunschweig, Wiesbaden:
Vieweg, 1980.

(Anwendung programmierbarer Taschenrechner;
Bd. 4)

ISBN 3-528-04169-2

1980

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1980

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Druck: E. Hunold, Braunschweig

Buchbinderische Verarbeitung: W. Langelüddecke, Braunschweig

Printed in Germany

ISBN 3-528-04169-2

Vorwort

Dieser Band ist Bestandteil einer Reihe über die Anwendung programmierbarer Taschenrechner in Naturwissenschaft und Technik. Er versteht sich nicht als Lehrbuch, sondern als Grundlage und Anregung zur Erstellung eigener Programme für den jeweils vorhandenen Rechnertyp (jeglicher Notation). Aus dieser Sicht ist auch das breite Spektrum der Anwendungsbeispiele zu sehen. Es ging mir bei den Programmen in erster Linie um eine klare, übersichtliche Form und nicht um die Ausnutzung bestimmter Typ-Eigenheiten.

Dieses Buch wendet sich an Ingenieure und Techniker, sowie auch an Studenten der Universitäten und Fachhochschulen. Weiterhin soll es als Anregung zum Einsatz des programmierbaren Taschenrechners beim praktischen Physikunterricht in allgemeinbildenden Schulen dienen und gewisse, noch herrschende Vorurteile abbauen. Es lassen sich Zusammenhänge demonstrieren, die auch experimentell nicht darstellbar sind (z.B. die Planetengesetze). Darüberhinaus zeigen sich auf natürliche Weise die Beziehungen zwischen Bewegung und mathematischem Gesetz. Aber auch dem interessierten Laien wird durch die kurze Einführung zum Themengebiet eine Einarbeitung ermöglicht. Es wird außerdem eine gewisse Kenntnis in der Taschenrechnerprogrammierung, insbesondere zu den Typen TI 58/59, vorausgesetzt. Eventuell ist das in der Literatur angegebene Einführungsbuch [1] zu lesen.

Der Inhalt dieses Bandes umfaßt die Technische Mechanik mit ihren Teilgebieten Kinematik, der Lehre von den allgemeinen Bewegungsvorgängen, und der Dynamik, der Lehre von den Kräften. Letzere unterteilt sich wiederum in die Statik, der Lehre vom Gleichgewicht der Körper, und der Kinetik, der Lehre von den Körperbewegungen durch Kräfte. Da die Kinematik Grundlagen der Kinetik behandelt, die Statik jedoch allgemeine Grundlagen betrachtet, ist in diesem Buch die Reihenfolge Statik/Kinematik/Kinetik gewählt worden. Die Programme sind so allgemein gehalten, daß sie ein möglichst umfassendes Teilgebiet dieser Gliederung erfassen.

Durch die Anregung von Herrn H. J. Niclas, Lektor im Vieweg Verlag, entstand dieser Band. Ihm und dem Verlag Vieweg möchte ich an dieser Stelle für die freundliche Aufnahme danken. Weiterer Dank gebührt Herrn K. Nielsen, Produkt Marketing Manager von Texas Instruments und Herrn K. H. Burkart, für ihre hilfreiche Unterstützung. Zuletzt gilt mein besonderer Dank all denjenigen, die direkt oder indirekt, zur Entstehung dieses Buches beigetragen haben und damit insbesondere meiner Frau (Ulrike) für ihre tatkräftige Unterstützung bei der Manuskriptbearbeitung.

Hamm, September 1979

Harald Nahrstedt

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
1.1 Algorithmen und Flußdiagramme	1
1.2 AOS-Technik	4
1.3 Allgemeine Programmiergrundlagen	5
1.4 Dokumentation	6
2 Statik starrer Körper	7
2.1 Kraft, Moment und Gleichgewicht	7
2.1.1 Reduktion einer räumlichen Kräftegruppe	7
2.1.2 Zerlegung einer Kraft	14
2.1.3 Stützkkräfte in Tragwerken	16
2.1.4 Biegeträger	19
2.1.5 Anwendungsbeispiele	23
2.2 Seiltheorie	30
2.2.1 Seil unter Eigenlast	30
2.2.2 Die Seilkurve als Variationsproblem	31
2.2.3 Die exakte Lösung	34
2.2.4 Straff gespanntes Seil unter vertikaler Einzellast	37
2.2.5 Anwendungsbeispiele	40
2.3 Reibung	49
2.3.1 Keil und schiefe Ebene	49
2.3.2 Gewindereibung	50
2.3.3 Seilreibung	52
2.3.4 Anwendungsbeispiele	53
3 Kinematik	55
3.1 Numerische Behandlung von Differentialgleichungen der Bewegung	55
3.2 Bewegung des materiellen Punktes	56
3.2.1 Bewegungsdiagramme	58
3.2.2 Anwendungsbeispiele	62

4 Kinetik	66
4.1 Kinetik des Massenpunktes	66
4.1.1 Freie Bewegungen eines Massenpunktes im widerstehenden Mittel	66
4.1.2 Das mathematische Pendel als erzwungene Bewegung	71
4.1.3 Gravitation und Planetenbewegung, als die Bewegung eines Massenpunktes unter Einfluß einer Zentralkraft	73
4.1.4 Die Raketenbewegung, als die Bewegung eines Massenpunktes mit veränderlicher Masse	78
4.1.5 Anwendungsbeispiele	82
4.2 Kinetik starrer Körper	92
4.2.1 Massenträgheitsmoment	93
4.2.2 Das physikalische Pendel	99
4.2.3 Reduzierte Masse und Schwungmoment	100
4.2.4 Deviationsmomente	102
4.2.5 Massenkräfte beim Kurbeltrieb und ihr Ausgleich	104
4.2.6 Realer Stoß fester Körper	107
4.2.7 Anwendungsbeispiele	113
4.3 Mechanische Schwingungen	123
4.3.1 Freie Schwingung	123
4.3.2 Erzwungene Schwingung durch eine rotierende Masse	126
4.3.3 Erzwungene Schwingung durch rotierende und oszillierende Massen	127
4.3.4 Schwingung unter Berücksichtigung einer Federmasse	129
4.3.5 Biegeschwingungen	130
4.3.6 Drehschwingungen	131
4.3.7 Anwendungsbeispiele	133
 Literaturverzeichnis	 147
Sachwortverzeichnis	148

1 Einführung

Bei der Lösung naturwissenschaftlicher und technischer Probleme, gewinnen neben den analytischen Methoden die numerischen immer mehr an Bedeutung. Die Entwicklung einer exakten Lösung (sofern sie überhaupt existiert), ist in der Regel mit erheblich größerem Aufwand verbunden, als der Einsatz eines Näherungsverfahrens. Zumal die so erhaltene Näherungslösung der exakten Lösung beliebig angenähert werden kann. Die dabei auftretenden umfangreichen Rechnungen erledigt üblicherweise eine EDV-Anlage. Die zunehmenden Speicher- und Strukturweiterungen programmierbarer Taschenrechner lassen in dieser Hinsicht ihren Einsatz immer interessanter erscheinen. Durch ihre Ortsgebundenheit und den damit verbundenen direkten Einsatz nicht nur am Arbeitsplatz, bilden sie eine sinnvolle Ergänzung vorhandener größerer Anlagen.

1.1 Algorithmen und Flußdiagramme

Jedem automatisierten Prozeß liegt ein Algorithmus zugrunde. Umgekehrt ist auch bisher kein anderer Weg bekannt, einen Prozeß zu automatisieren, als ihn zu algorithmisieren. Das heißt endliche, linear folgende Regeln festzulegen, nach denen ein vorhandener oder zu konstruierender Automat durch Eingabewerte und sinnvolle Umformungen, Ausgabewerte (Ergebnisse) erzeugt. Da ein programmierbarer Taschenrechner ein ebensolcher Automat ist, bedarf es zu seiner Nutzung solcher Algorithmen. Die exakte Formulierung eines Algorithmus in der Weise, daß sie vom Rechner „verstanden“ und nachvollzogen werden kann, nennt man Programm. Damit haben wir alle Stufen der Programmentwicklung angedeutet.

Sie beginnt bei der Problemanalyse und der Feststellung durchzuführender Regeln. Den so, mitunter schriftlich fixierten Algorithmus, kann man mit Hilfe eines Flußdiagramms graphisch anschaulich wiedergeben. Wie immer, wenn die Umgangssprache unzureichend ist, bedient man sich einer speziellen Sprachform. So ist es in der Technik die Technische Zeichnung und in der Informatik das Flußdiagramm. Es besteht vorwiegend aus den in Bild 1.1 gezeigten einfachen Sprachsymbolen.

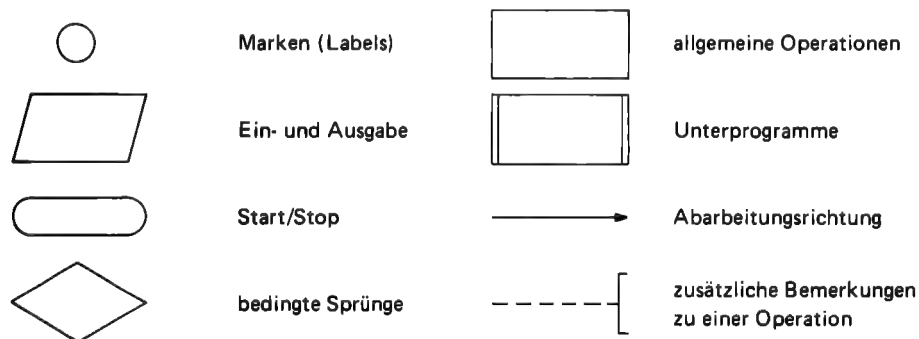


Bild 1.1

Das nachfolgende, sehr einfache Beispiel, zeigt die Schritte zur Programmentwicklung exemplarisch.

Gesucht ist ein Programm zum Wurzelziehen aus beliebig reellen Zahlen. Kurz

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Problemanalyse liefert einen Gültigkeitsbereich der Funktion für alle positiv reellen Zahlen. Ein möglicher Algorithmus ist damit:

1. Lies x ein
2. Ist $x < 0$, dann weiter bei 6.
3. Bilde $y = \sqrt{x}$
4. Gib y aus
5. Stop
6. „Fehlermeldung“
7. Stop

Es gäbe auch z. B. noch die Möglichkeit, nach der Fehlermeldung $|x|$ zu bilden und nach 3. zu gehen, etc.

Das Flußdiagramm in Bild 1.2 macht den Algorithmus noch anschaulicher. Der für den TI58/59 modifizierte Algorithmus, also das Programm, hat dann die in Tabelle 1.1 wiedergegebene Form. Bild 1.3 zeigt die Programmanwendung an zwei Beispielen.

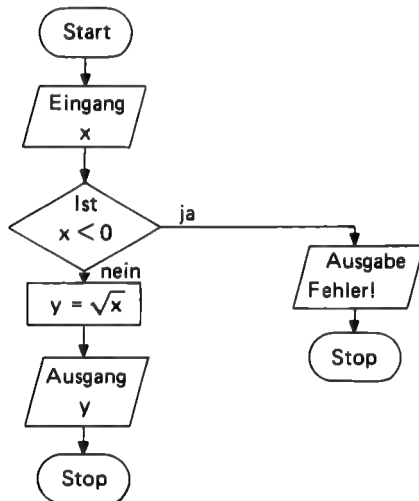


Bild 1.2
Flußdiagramm zum Problem Wurzelziehen

WURZELZIEHEN

17. x
4.123105626 √x

WURZELZIEHEN

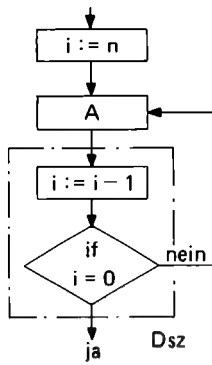
-17. x
FEHLER!

Bild 1.3
Anwendung des Wurzelprogramms
an zwei Beispielen

Mit Hilfe der in Bild 1.1 beschriebenen Symbole, läßt sich auch die Wirkung des Dsz-Befehls (decrement and skip on zero) in seiner hauptsächlichen Anwendung als Zähler erklären. Bild 1.4 zeigt diese Anwendung im Flußdiagramm.

Tabelle 1.1 Programm-Wurzelziehen

Start und Ausdruck Wurzelziehen	Ausdruck – gestrichelte Linie –	Bedingte Abfrage, Berechnung und Ausdruck
000 76 LBL	043 69 DP	075 32 %IT
001 11 R	044 00 00	076 05 5
002 25 CLR	045 02 2	077 02 2
003 69 DP	046 00 0	078 05 5
004 00 00	047 02 2	079 00 0
005 04 4	048 00 0	080 69 DP
006 03 3	049 02 2	081 04 04
007 04 4	050 00 0	082 00 0
008 01 1	051 02 2	083 32 %IT
009 03 3	052 00 0	084 22 INV
010 05 5	053 02 2	085 77 GE
011 04 4	054 00 0	086 16 R ¹
012 06 6	055 69 DP	087 34 FX
013 01 1	056 01 01	088 69 DP
014 07 7	057 69 DP	089 06 06
015 69 DP	058 02 02	090 98 ADV
016 01 01	059 69 DP	091 98 ADV
017 02 2	060 03 03	092 98 ADV
018 07 7	061 69 DP	093 98 ADV
019 04 4	062 04 04	094 91 R/S
020 06 6	063 69 DP	
021 02 2	064 05 05	
022 04 4	065 98 ADV	
023 01 1	066 69 DP	
024 07 7	067 00 00	
025 02 2	068 05 5	
026 03 3	069 00 0	
027 69 DP	070 69 DP	
028 02 02	071 04 04	
029 01 1		
030 07 7		
031 03 3		
032 01 1		
033 00 0	Eingabe und Aus- druck	
034 00 0		
035 00 0	072 91 R/S	
036 00 0	073 69 DP	
037 00 0	074 06 06	
038 00 0		
039 69 DP		
040 03 03		
041 69 DP		
042 05 05		
		Fehlermeldung bei negativem Eingabe- wert
		095 76 LBL
		096 16 R ¹
		097 69 DP
		098 00 00
		099 02 2
		100 01 1
		101 01 1
		102 07 7
		103 69 DP
		104 01 01
		105 02 2
		106 03 3
		107 02 2
		108 07 7
		109 01 1
		110 07 7
		111 03 3
		112 05 5
		113 07 7
		114 03 3
		115 69 DP
		116 02 02
		117 69 DP
		118 05 05
		119 98 ADV
		120 98 ADV
		121 98 ADV
		122 98 ADV
		123 91 R/S



Ein Zähler i wird auf die Anzahl n gesetzt, die eine Befehlsfolge A abgearbeitet werden soll. In der Befehlsfolge A läßt sich der Zähler auch direkt oder indirekt als Adresse verwenden. Das in allen Flußdiagrammen auftretende Zuweisungszeichen ($:=$) ist nicht mit dem mathematischen Gleichheitszeichen zu verwechseln. Die in Bild 1.4 verwendete Zuweisung

$i := i - 1$

ist mathematisch wenig sinnvoll, bedeutet aber informatisch die Verminderung des Wertes i um 1. Damit ist die Funktion des Zuweisungszeichens beschrieben. Der rechts des Zeichens stehende Ausdruck wird als Ergebnis der links stehenden Variablen zugewiesen.

Bild 1.4 Die Anwendung des Dsz-Befehls als Zähler für Programmschleifen

1.2 AOS-Technik

Auf dem derzeitigen Markt für programmierbare Taschenrechner unterscheiden wir zwei Systeme, die mit algebraischer und die mit umgekehrter polnischer Notation. Mit den Wirkungsweisen und Zusammenhängen habe ich mich in [10] umfassend auseinandergesetzt. Da diesem Buch der TI58/59 zugrunde liegt, will ich auf das algebraische Organisationssystem (AOS) noch etwas eingehen. Eine umfangreiche Beschreibung finden Sie in [1].

Jedem Computer, auch einem programmierbaren Taschenrechner, liegt die in Bild 1.5 dargestellte Grundstruktur zugrunde.

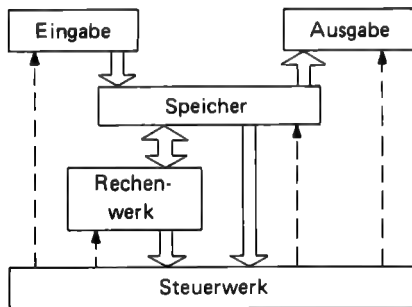


Bild 1.5
Grundstruktur eines Computers
(\longleftrightarrow Daten, $- - \rightarrow$ Steuerbefehle)

Die darin enthaltene Speichereinheit läßt sich, wie in Bild 1.6 dargestellt, in 3 logische Einheiten aufteilen. Die Grenze zwischen DSE und PSE ist beim TI/58/59 variabel und man spricht von einer sogenannten dynamischen Speicherverwaltung. Die ASE hat bei der AOS-Technik einen Hauptspeicher, den sogenannten Akkumulator. Außerdem bedient sich die ASE einer Vielzahl von Hilfsp speichern, zur Speicherung von Zwischenergebnissen. Diese Speicherung ist, im Gegensatz zur umgekehrten polnischen Notation, ohne Einfluß vom Benutzer und geschied nach den Gesetzen der Algebra. Den graphischen Zusammenhang gibt Bild 1.7 wieder.

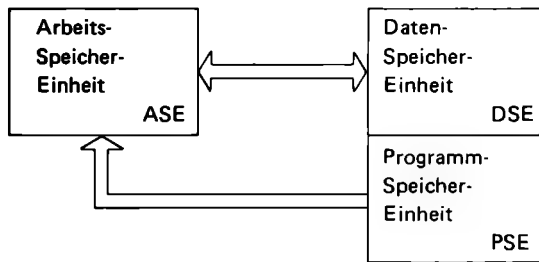


Bild 1.6
Gliederung der Speichereinheit

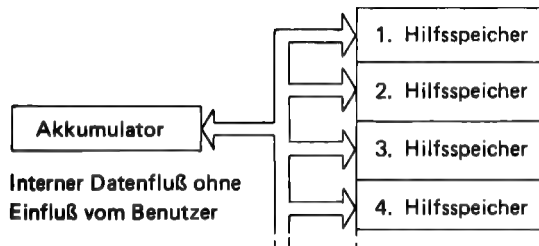


Bild 1.7
Arbeitsspeichereinheit (ASE)
bei algebraischer Notation

Wird nun ein geladenes Programm in der PSE aufgerufen, so veranlaßt dieses, über die Steuereinheit, den Transport von Werten, aus der DSE, der PSE oder über die Eingabe, in den Akkumulator. Das Rechenwerk, veranlaßt durch die Steuereinheit, verknüpft die Werte aus Akkumulator und Hilfsspeichern zu sinnvollen Ergebnissen. Das Endergebnis steht nach Abschluß aller Operationen im Akkumulator und kann dann an die DSE oder zur Ausgabe weitergegeben werden.

1.3 Allgemeine Programmiergrundlagen

Da dieses Buch als Anregung zum eigenen Programmieren gedacht ist, sollen an dieser Stelle helfende Grundlagen und Tips vermittelt werden.

Um den Algorithmus eines anstehenden Problems zu entwickeln, empfiehlt sich die Methode der strukturierten Programmierung. Dabei wird durch eine schrittweise Untergliederung des Problems (top-down-design) und deren Einzellösungen, das Gesamtproblem gelöst. Bild 1.8 zeigt ein Problem P und dessen Untergliederung in 3 Teilprobleme. Diese unterteilen sich je nach Möglichkeit wieder in Teilprobleme, usw., bis sich die Lösung eines Problems anschaulich aus der Summe der Einzellösungen ergibt.

Liegt ein umfassender Algorithmus in Flußdiagrammform vor, kann die Umsetzung zum Programm erfolgen. Dieser Vorgang dürfte bei Kenntnis des Rechners keine großen Schwierigkeiten bereiten. Nach der Programmerstellung empfiehlt sich jedoch eine kritische Betrachtung zwecks Optimierung des Programmschrittbedarfs. Auf folgende Punkte ist dabei zu achten:

1. Wiederholt gleiche Programmschritte lassen sich zu einem Unterprogramm zusammenfassen. Dies ist jedoch nur bei der Ersparnis von mehreren Programmschritten sinnvoll, da das Programm an Übersichtlichkeit verliert.
2. Wiederholt ähnliche Programmschritte mit wechselnden Daten lassen sich durch indirekte Programmierung im Programmschrittumfang vereinfachen. Diese komplexe Programmiermethode erfordert allerdings ein gewisses Maß an Verständnis und Übersicht.

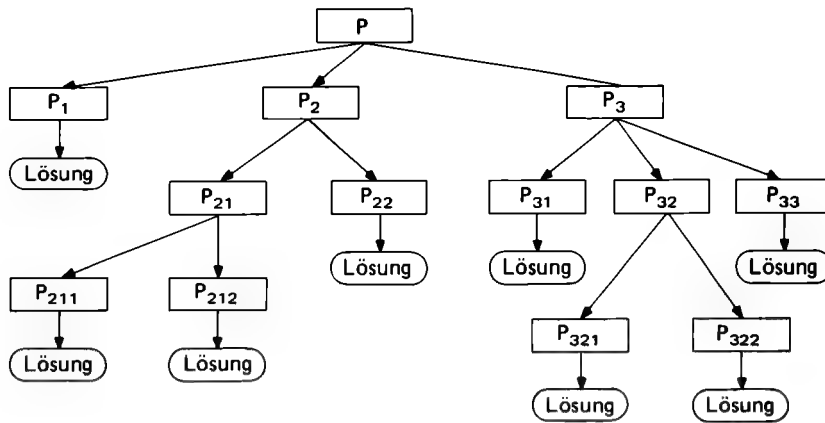


Bild 1.8 Aufteilung eines Problems in Teilprobleme

Man kann auch schon beim Aufstellen des Flußdiagramms auf gewisse Rechneigenheiten Rücksicht nehmen. Weiterhin sollten bestehende Programmrestriktionen und daraus resultierende Fehler notiert werden, um bei einer späteren Benutzung unnötige Fehler zu vermeiden. Dies gehört aber schon eigentlich ins nächste Kapitel.

1.4 Dokumentation

Um eine sinnvolle Programmpflege betreiben zu können, d.h. ständig neu gewonnene Erkenntnisse in alten Programmen zu verwerten, bedarf es einer gründlichen Programmdokumentation. Es empfiehlt sich also die Benutzung von Formblättern. Zu einer umfangreichen Programmdokumentation gehören, in der Reihenfolge ihres Entstehens:

1. Berechnungsgrundlagen
2. Flußdiagramm
3. Speicherplatzbelegung
4. Programmplatzbelegung
5. Programmbeschreibung (Eingaben, Ausgaben, etc.)
6. Testbeispiel
7. Angabe der Restriktionen und möglicher Fehler

In einer solchen Programmbibliothek lassen sich dann auch bei späteren Problemen Teillösungen finden. Schreiben Sie dazu Ihre Programme abschnittsweise, wie ich es in diesem Buch ebenfalls getan habe, auf und sparen Sie nicht mit Kommentaren.

2 Statik starrer Körper

Eine Kraft kann nicht unmittelbar, sondern nur anhand ihrer Wirkung beobachtet werden. Ihr Wirken zeigt sich in der Verformung eines Körpers oder der Änderung seines Bewegungszustandes. Aufgrund der fundamentalen Bedeutung der Kraft für die Mechanik, sollen im ersten Teil dieses Kapitels ein paar grundlegende Anschauungen und Programme behandelt werden.

2.1 Kraft, Moment und Gleichgewicht

Die Kraft hat, für ihre mathematische Behandlung am starren Körper, den Charakter eines linienflüchtigen Vektors. Sie unterliegt damit den Gesetzen der Vektoralgebra und ist durch Größe, Wirkrichtung und Angriffspunkt eindeutig bestimmt.

2.1.1 Reduktion einer räumlichen Kräftegruppe

Dieser allgemeinste Fall einer Kräftegruppe beinhaltet alle möglichen Besonderheiten, wie später noch nachfolgend dargestellt wird.

Wir betrachten die Anordnung von n Kräften F_j ; $j = 1 \dots n$; bezüglich eines beliebig rechtwinkligen Koordinatensystems (e_1, e_2, e_3), nach Bild 2.1, mit ihren Angriffspunkten a_j an einem imaginären starren Körper. Die Reduktion dieser Kräfte bezüglich des frei gewählten Ursprungs u ergibt die aus den Vektoren

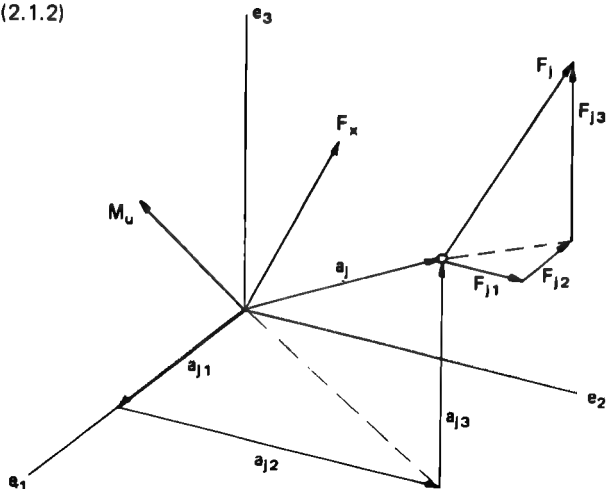
$$F_r = \sum_{j=1}^n F_j \quad (2.1.1)$$

und

$$M_u = \sum_{j=1}^n M_{uj} = \sum_{j=1}^n a_j \times F_j \quad (2.1.2)$$

resultierende Kraft und Moment.

Bild 2.1
Kräfte im Raum



Die für ein Programm wichtige Komponentendarstellung ergibt sich unter Einführung eines freien Zählers i und zweier davon abhängiger Zähler $p(i)$ und $q(i)$ mit der Zuordnung

i	p	q
1	2	3
2	3	1
3	1	2

aus den Gleichungen

$$F_{ri} = \sum_{j=1}^n F_{ji}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.3)$$

und

$$M_{ui} = \sum_{j=1}^n M_{uji} = \sum_{j=1}^n (a_{jp} F_{jq} - a_{jq} F_{jp}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.4)$$

Diese Schreibweise ist gezielt auf eine indirekte Programmierung abgestimmt. Auf eine Anwendung des Matrix-Programms des Standard Software Moduls habe ich hier verzichtet, um das Prinzip der indirekten Programmierung anschaulich zu demonstrieren. Das Matrix-Programm findet unter 2.1.2 Verwendung.

Der funktionale Zusammenhang der Zähler i, p, q kann in einer Ringanordnung von 3 Speichern und dem darin Herumschieben der Werte 1, 2, 3, wie in Bild 2.2 dargestellt, erreicht werden.

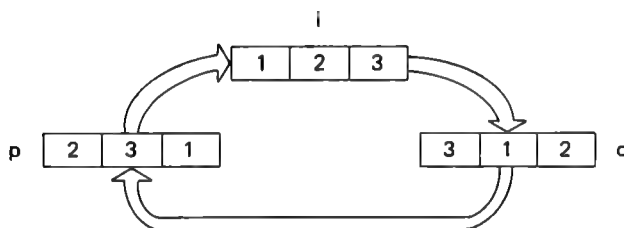


Bild 2.2
Ringspeicher und Zähler

Die betragsmäßigen Größen von resultierender Kraft und resultierendem Moment ergeben sich aus den berechneten Komponenten nach dem pythagoräischen Ansatz

$$|F_r| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 F_{ri}^2} \quad (2.1.5)$$

und

$$|M_u| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 M_{ui}^2} \quad (2.1.6)$$

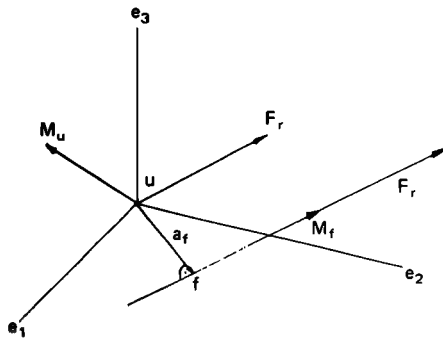


Bild 2.3
Darstellung der Dynamie

Wird die resultierende Kraft F_r senkrecht aus der Ebene, die F_r und M_u aufspannen, so um den Vektor a_f verschoben, daß resultierende Kraft und Moment die gleiche Richtung haben, so bezeichnet man dieses Vektorpaar (F_r, M_f) als Dynamie (Kraftschraube). Der Ortsvektor a_f des Fußpunktes f bezüglich des Ursprunges u (Bild 2.3) ergibt sich in seiner Komponentendarstellung aus

$$a_{fi} = \frac{1}{|F_r|^2} (F_{rp} M_{uq} - F_{rq} M_{up}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.7)$$

Mit Hilfe des Parameters p

$$p = \frac{F_r M_u}{|F_r|^2} = \frac{1}{|F_r|^2} \sum_{i=1}^3 F_{ri} M_{ui} \quad (2.1.8)$$

läßt sich der auf den Fußpunkt f (Bild 2.3) bezogene Momentenvektor M_f berechnen

$$M_f = p F_r = p \sum_{i=1}^3 F_{ri} \quad (2.1.9)$$

Außer der Möglichkeit der Komponentenangabe, gibt es zur Richtungsangabe eines Vektors zum Ursprung und den Koordinaten, die Angabe der Richtungswinkel. Unter Betrachtung von Bild 2.4 ergeben sie sich aus den Gleichungen

$$\alpha_i = \arccos \frac{a_i}{|a|}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.10)$$

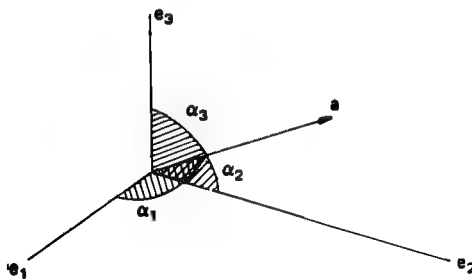


Bild 2.4
Richtungswinkel eines Vektors

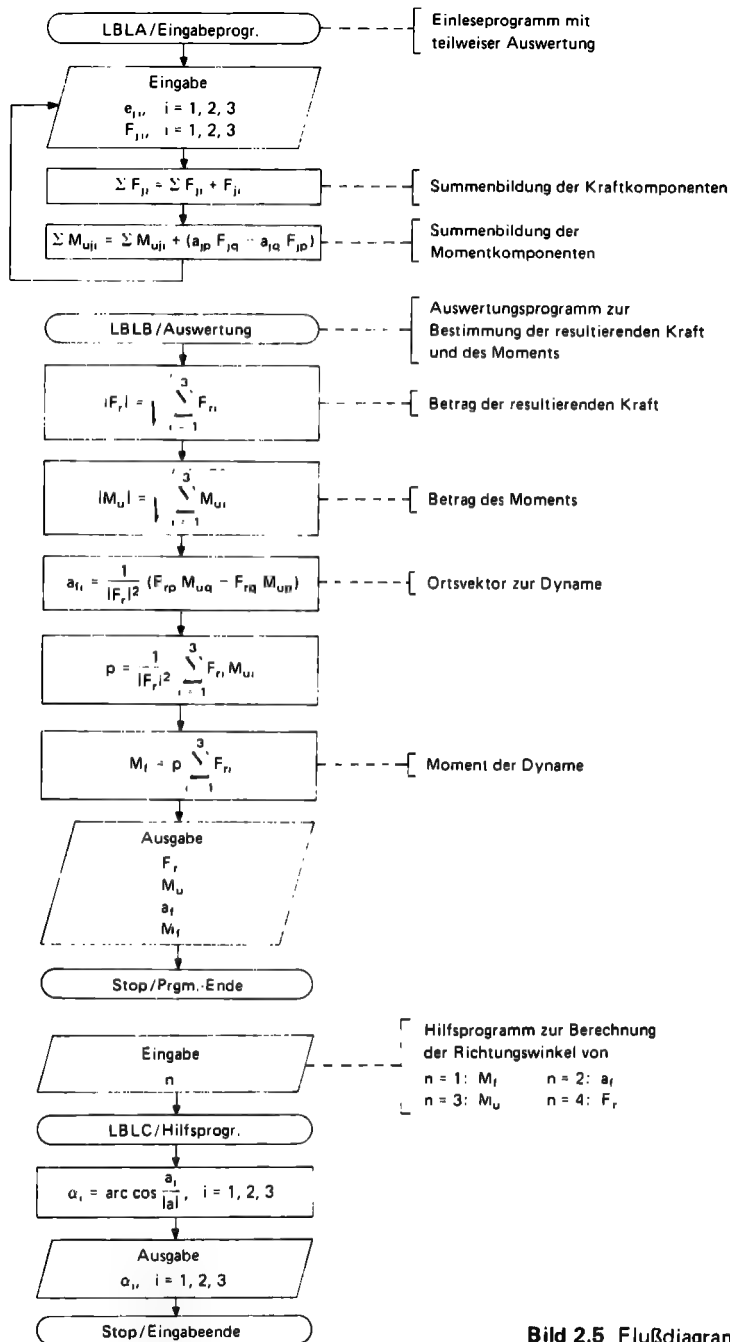


Bild 2.5 Flußdiagramm zur Kräfte- und Momentenreduktion

Die Programmanalyse ist damit abgeschlossen und wir kommen zur Darstellung des Algorithmus in Flußdiagrammform. Er ergibt sich zwangsläufig aus der Abfolge der aufgestellten Gleichungen. Bild 2.5 ist eine mögliche Form.

Zu Anschauungszwecken ist dieses erste Flußdiagramm etwas aufwendiger kommentiert als die nachfolgenden Diagramme. Das auf den TI 58/59 zugeschnittene Programm lautet, bei einer Speicherplatzbelegung nach Tabelle 2.1, wie unter Tabelle 2.2 wiedergegeben. Eine Kommentierung der Ein- und Ausgabedaten durch das Programm, habe ich aus Übersichtlichkeit unterlassen. Tabelle 2.2 gibt also das ‚nackte‘ Programm wieder. Dies gilt gleichfalls für alle nachfolgenden Programme.

Tabelle 2.1 Speicherplatzbelegung zum Programm Kräfte- und Momentenreduktion

00	Zähler und Ind. Adr.				
01	F_{j3}	$\left. \begin{array}{l} F_j \\ \parallel \\ \left. \begin{array}{l} pF_{r3} = M_{f3} \\ pF_{r2} = M_{f2} \\ pF_{r1} = M_{f1} \end{array} \right\} M_f \end{array} \right\}$		10	$\sum F_{j3} = F_{r3}$
02	F_{j2}			11	$\sum F_{j2} = F_{r2}$
03	F_{j1}			12	$\sum F_{j1} = F_{r1}$
04	e_{j3}	$\left. \begin{array}{l} e_j \\ \parallel \\ \left. \begin{array}{l} a_{f3} \\ a_{f2} \\ a_{f1} \end{array} \right\} a_f \end{array} \right\}$		13	$ M_f $
05	e_{j2}			14	$ a_f $
06	e_{j1}			15	$ M_u $
07	$\sum M_{uj3} = M_{u3}$	$\left. \begin{array}{l} M_u \\ \parallel \\ \left. \begin{array}{l} \sum M_{uj3} = M_{u3} \\ \sum M_{uj2} = M_{u2} \\ \sum M_{uj1} = M_{u1} \end{array} \right\} M_u \end{array} \right\}$		16	$ F_r $
08	$\sum M_{uj2} = M_{u2}$			17	p
09	$\sum M_{uj1} = M_{u1}$			18	$\left. \begin{array}{l} \text{Zähler + Ind. Adr.} \end{array} \right\}$
				19	
				20	
				21	$\left. \begin{array}{l} \text{1. Ringzähler} \end{array} \right\}$
				22	
				23	
				24	$\left. \begin{array}{l} \text{2. Ringzähler} \end{array} \right\}$
				25	
				26	
1. Fall	$\left \begin{array}{ccc} \overbrace{1} & 3 & 2 \\ 2 & \overbrace{1} & 3 \\ 3 & 2 & \overbrace{1} \end{array} \right $			$\left \begin{array}{ccc} \overbrace{4} & 6 & 5 \\ 5 & \overbrace{4} & 6 \\ 6 & 5 & \overbrace{4} \end{array} \right $	
2. Fall	$\left \begin{array}{ccc} \overbrace{7} & 9 & 8 \\ 8 & \overbrace{7} & 9 \\ 9 & 8 & \overbrace{7} \end{array} \right $			$\left \begin{array}{ccc} \overbrace{10} & 12 & 11 \\ 11 & \overbrace{10} & 12 \\ 12 & 11 & \overbrace{10} \end{array} \right $	

Eine ebene Kräftegruppe läßt sich mit diesem Programm ebenfalls behandeln. Dabei wird lediglich die 3. Komponente der Vektoren Null.

Haben alle Kräfte einen gemeinsamen Angriffspunkt, so ist es sinnvoll, den Koordinatenursprung in diesen zu legen. Die Koordinaten des Angriffspunktes werden dann mit Null eingegeben. Ein Moment tritt für dieses System nicht auf, erscheint also mit Null als Ausgabewert. Sind resultierende Kraft und Moment Null, gilt also

$$F_{ri} = 0 \quad \text{und} \quad M_{ui} = 0, \quad \text{für alle } i = 1, 2, 3 \quad (2.1.11)$$

so befindet sich der, diesen äußeren Kräften ausgesetzte, starre Körper im Gleichgewicht.

Tabelle 2.2 Programm Kräftereduktion zum T158/59

Eingabeprogramm:

Start

000 76 LBL
001 11 A
002 47 CMS
003 06 6
004 18 C*

Eingabe

005 76 LBL
006 85 +
007 06 6
008 42 STD
009 00 00
010 76 LBL
011 75 -

012 91 R/S
013 99 PRT
014 72 ST*
015 00 00
016 97 DSZ
017 00 00
018 75 -
019 98 ADV

**Berechnungsvor-
bereitung**

020 09 9
021 16 A*

**Berechnung zur
resultierenden Kraft**

022 76 LBL
023 65 x
024 73 RC*
025 00 00
026 74 SM*
027 19 19

**Berechnung zum
Moment**

028 19 D*
029 74 SM*
030 18 18

Ringshiften

031 10 E*

**Zählerverminderung
+ Rücksprung**

032 17 B*
033 97 DSZ
034 00 00
035 65 x
036 61 GTD
037 85 +

Auswertungsprogramm:

Start

038 76 LBL
039 12 B
040 98 ADV
041 98 ADV
042 01 1
043 02 2
044 18 C*

**Bestimmung des Orts-
vektors/1. Teil**

045 06 6
046 16 A*
047 76 LBL
048 55 +
049 19 D*
050 72 ST*
051 18 18

052 10 E*
053 17 B*
054 97 DSZ
055 00 00
056 55 +

**Bestimmung der
Vektorbeträge/1. Teil**

057 06 6
058 16 A*
059 76 LBL
060 89 +
061 73 RC*
062 20 20
063 33 X²
064 44 SUM
065 16 16

066 73 RC*
067 19 19
068 33 X²
069 44 SUM
070 15 15
071 73 RC*
072 18 18
073 33 X²
074 44 SUM
075 14 14
076 17 B*
077 97 DSZ
078 00 00
079 89 +

**Bestimmung des
Ortsvektors/2. Teil**

080 43 RCL
081 16 16
082 35 1/X
083 49 PRD
084 04 04
085 49 PRD
086 05 05
087 49 PRD
088 06 06
089 42 STD
090 17 17
091 33 X²
092 49 PRD
093 14 14

**Bestimmung des
Parameters**

094 09 9
095 16 A*
096 76 LBL
097 52 EE
098 73 RC*
099 18 18
100 65 x
101 73 RC*
102 19 19
103 85 +
104 17 B*
105 97 DSZ
106 00 00
107 52 EE
108 00 0
109 95 =

110 49 PRD
111 17 17

**Bestimmung des
Momentes M**

112 01 1
113 02 2
114 16 A*
115 76 LBL
116 44 SUM
117 73 RC*
118 18 18
119 65 x
120 43 RCL
121 17 17
122 95 =
123 72 ST*

124 00 00
125 33 X²
126 44 SUM
127 13 13
128 17 B*
129 97 DSZ
130 00 00
131 44 SUM

**Bestimmung der
Vektorbeträge/2. Teil**

132 01 1
133 06 6
134 16 A*
135 01 1
136 44 SUM
137 00 00

138 76 LBL
139 42 STD
140 73 RC*
141 18 18
142 34 FX
143 72 ST*
144 18 18
145 17 B*
146 97 DSZ
147 00 00
148 42 STD

Ausgabe + Ende

149 00 0
150 22 INV
151 90 LST
152 91 R/S

Unterprogramme:**Setzen der Zähler**

153 76 LBL
 154 16 R'
 155 42 STD
 156 18 18
 157 85 +
 158 03 3
 159 85 +
 160 42 STD
 161 19 19
 162 03 3
 163 95 =
 164 42 STD
 165 20 20
 166 03 3
 167 42 STD
 168 00 00
 169 92 RTN

Verminderung der Zähler um 1

170 76 LBL
 171 17 B'
 172 01 1
 173 94 +/-
 174 44 SUM

175 18 18
 176 44 SUM
 177 19 19
 178 44 SUM
 179 20 20
 180 92 RTN

Setzen der Ringzähler

181 76 LBL
 182 18 C'
 183 42 STD
 184 18 18
 185 06 6
 186 42 STD
 187 00 00
 188 02 2
 189 06 6
 190 42 STD
 191 19 19
 192 76 LBL
 193 38 SIN
 194 43 RCL
 195 18 18
 196 72 ST*

197 19 19
 198 17 B'
 199 97 DSZ
 200 00 00
 201 38 SIN
 202 92 RTN

Berechnung mit Ringzähler

203 76 LBL
 204 19 D'
 205 73 RC*
 206 25 25
 207 65 x
 208 73 RC*
 209 21 21
 210 75 -
 211 73 RC*
 212 24 24
 213 65 x
 214 73 RC*
 215 22 22
 216 95 =
 217 92 RTN

Ringzählervertauschung

218 76 LBL
 219 10 E'
 220 43 RCL
 221 26 26
 222 48 EXC
 223 24 24
 224 48 EXC
 225 25 25
 226 42 STD
 227 26 26
 228 43 RCL
 229 23 23
 230 48 EXC
 231 21 21
 232 48 EXC
 233 22 22
 234 42 STD
 235 23 23
 236 92 RTN

Hilfsprogramm:**Start**

237 76 LBL
 238 13 C
 239 99 PRT
 240 98 ADV
 241 65 x
 242 03 3
 243 42 STD
 244 00 00
 245 95 =
 246 42 STD
 247 18 18
 248 02 2
 249 09 9
 250 42 STD
 251 19 19
 252 00 0
 253 42 STD
 254 20 20
 255 76 LBL
 256 34 FX

257 73 RC*
 258 18 18
 259 72 ST*
 260 19 19
 261 33 x*
 262 44 SUM
 263 20 20

Zählerverminderung um 1 + Rücksprung

264 01 1
 265 94 +/-
 266 44 SUM
 267 18 18
 268 44 SUM
 269 19 19
 270 97 DSZ
 271 00 00
 272 34 FX

Berechnungsvorbereitung

273 03 3
 274 42 STD
 275 00 00
 276 02 2
 277 09 9
 278 42 STD
 279 18 18
 280 43 RCL
 281 20 20
 282 34 FX
 283 42 STD
 284 20 20

Berechnung + Ausgabe

285 76 LBL
 286 45 yx
 287 73 RC*
 288 18 18
 289 55 --

290 43 RCL
 291 20 20
 292 95 =
 293 22 INV
 294 39 COS
 295 99 PRT

Zählerverminderung um 1 + Rücksprung

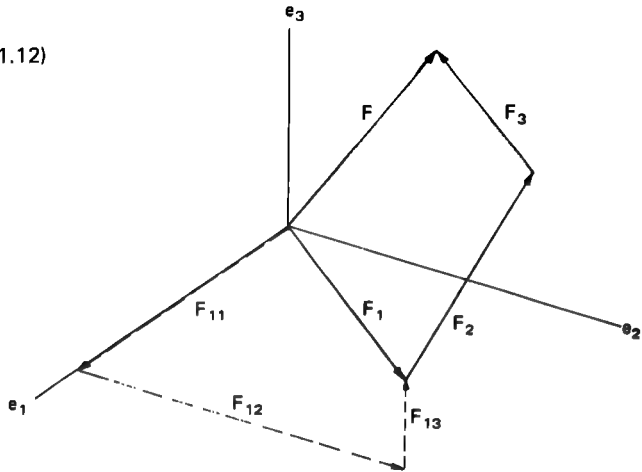
296 01 1
 297 94 +/-
 298 44 SUM
 299 18 18
 300 97 DSZ
 301 00 00
 302 45 yx
 303 91 R/S

2.1.2 Zerlegung einer Kraft

Der Vorgang der Kräfte-Reduktion ist ein umkehrbarer Prozeß. Aus diesem Grunde läßt sich eine Kraft wieder in Komponenten zerlegen. Eine Zerlegung ist eindeutig möglich, wenn 3 unabhängige Richtungen für die Komponenten gegeben sind. Es soll somit die Kraft F in die Komponenten F_j , $j = 1, 2, 3$, zerlegt werden. Diese Komponenten bilden bezüglich des Koordinatensystems die Summen

$$F_i = \sum_{j=1}^3 F_{ji}. \quad (2.1.12)$$

Bild 2.6
Kraftkomponenten



Unter Benutzung der Richtungswinkel (Bild 2.4) α_{ji} ergibt

$$\sum_{j=1}^3 F_j \cos \alpha_{ji} = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1.13)$$

alle Komponenten längs der Koordinatenachsen. In abgekürzter Schreibweise für

$$\cos \alpha_{ji} = a_{ji} \quad (2.1.14)$$

wird damit

$$\sum_{j=1}^3 F_j a_{ji} = F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.15)$$

Wie oben angedeutet, ist dieses Gleichungssystem unter bestimmten Bedingungen eindeutig lösbar, denn wir erhalten 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems

$$A F = F' \quad (2.1.16)$$

bietet sich das Solid-State-Softwareprogramm ML-02 an. Dabei entsteht eine Schwierigkeit, denn durch die Verwendung als Unterprogramm ist die Eingabe über R/S nicht möglich, da das Unterprogramm durch INV SBR ins Hauptprogramm zurückspringt. Listet man sich diese Programmteile aus, so ergibt sich für unser Problem folgende, durch ML-02 vorbestimmte und in Tabelle 2.3 wieder-gegebene, Speicherplatzbelegung. Unter Festlegung des Berechnungsalgorithmus in Flußdiagramm-form (Bild 2.7), ergibt sich das entsprechende Programm in Tabelle 2.4.

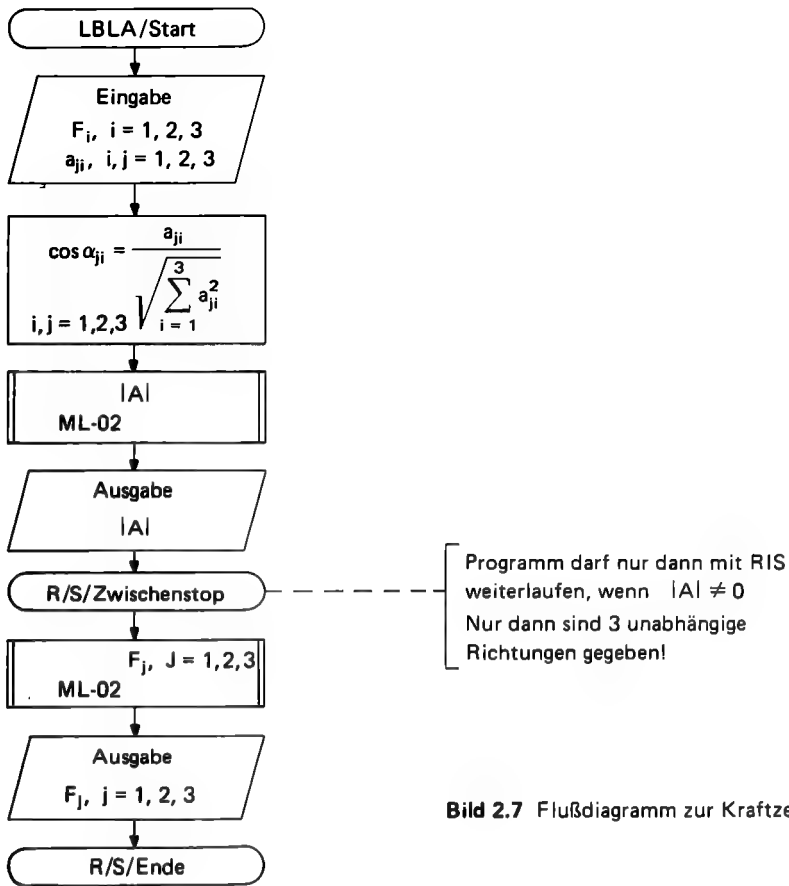


Bild 2.7 Flußdiagramm zur Kraftzerlegung

Tabelle 2.3 Speicherplatzbelegung

vorbestimmt:

08	a ₁₁	} a _{1i}	11	a ₂₁	} a _{2i}	14	a ₃₁	} a _{3i}	21	F ₁	} F _i
09	a ₁₂		12	a ₂₂		15	a ₃₂		20	F ₂	
10	a ₁₃		13	a ₂₃		16	a ₃₃		22	F ₃	

frei gewählt:

00	} Zähler	05	F ₁	} F _i
01		06	F ₂	
02		07	F ₃	

Tabelle 2.4 Programm Kraftzerlegung zum TI 58/59

Abbildung 2.14: Programmfortschreibung zum 1.6.6.6.6.6.

Start/Einlesen										Determinantenberechnung und Ausgabe									
000	72	ST*	027	03	3	057	22	INV		083	03	3							
001	00	00	028	42	STD	058	64	PD*		084	42	STD							
002	92	RTH	029	01	01	059	02	02		085	07	07							
003	32	X:T	030	76	LBL	060	32	X:T		086	36	PGM							
004	01	1	031	75	-	061	22	INV		087	02	02							
005	44	SUM	032	73	RC*	062	44	SUM		088	13	C							
006	00	00	033	02	02	063	02	02		089	91	R/S							
007	32	X:T	034	33	X	064	32	X:T											
008	99	PRT	035	85	+	065	97	DSZ											
009	81	RST	036	32	X:T	066	01	01											
010	76	LBL	037	22	INV	067	65	x											
011	11	A	038	44	SUM	068	97	DSZ											
012	47	CMS	039	02	02	069	00	00		090	25	CLR							
013	04	4	040	32	X:T	070	85	+		091	36	PGM							
014	81	RST	041	97	DSZ					092	02	02							
			042	01	01					093	15	E							
			043	75	-														
Berechnung										Umspeicherung									
Richtungskosinusse										Ausgabe der Lösung									
015	76	LBL	044	00	0	071	43	RCL		094	43	RCL							
016	12	B	045	95	=	072	05	05		095	20	20							
017	98	ADV	046	34	FX	073	42	STD		096	99	PRT							
018	03	3	047	32	X:T	074	21	21		097	43	RCL							
019	42	STD	048	03	3	075	43	RCL		098	21	21							
020	00	00	049	44	SUM	076	06	06		099	99	PRT							
021	01	1	050	02	02	077	42	STD		100	43	RCL							
022	06	6	051	42	STD	078	20	20		101	22	22							
023	42	STD	052	01	01	079	43	RCL		102	99	PRT							
024	02	02	053	01	1	080	07	07		103	91	R/S							
025	76	LBL	054	32	X:T	081	42	STD											
026	85	+	055	76	LBL	082	22	22											
			056	65	x														

Das Programm kann nach Ausgabe der Determinante nur dann mit R/S weiterlaufen, wenn diese ungleich Null ist.

2.1.3 Stützkräfte in Tragwerken

Wir kommen zur Anwendung der Gleichgewichtsbedingung. Das Ziel der statischen Auslegung von Tragwerken ist es, daß diese bei Einwirkung äußerer Kräfte ihre vorgesehene Ruhelage beibehalten. Die Belastungs- und Stützkkräfte müssen sich also im Gleichgewicht befinden. Die Untersuchung darüber kann natürlich mit dem zuvor bestimmten Programm geschehen.

Da aber ein Großteil von Berechnungen sich auf ebene Fachwerke beschränkt, soll nachfolgend ein Programm zur Berechnung ebener Fachwerke nach dem Knotenpunktverfahren entwickelt werden. In diesem Programm kann dann auf spezielle Belange des Berechnungsverfahrens eingegangen werden.

Unter einem ebenen Fachwerk versteht man idealisiert ein Gebilde aus geraden Stäben, die in ihren Endpunkten (Knoten) durch reibungsfreie Gelenke miteinander verbunden sind. Die äußeren Belastungskräfte greifen dabei nur in den Knoten an. Durch diese Idealisierung können in den Stäben nur Zug- oder Druckkräfte übertragen werden. Insbesondere gilt damit für jeden Knoten des Fachwerks die Gleichgewichtsbedingung. Betrachten wir einen Knoten bezüglich eines Koordinaten-

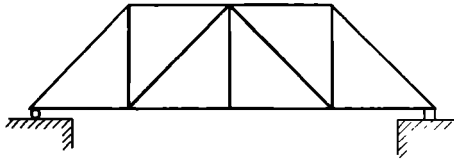


Bild 2.8
Ebenes Fachwerk

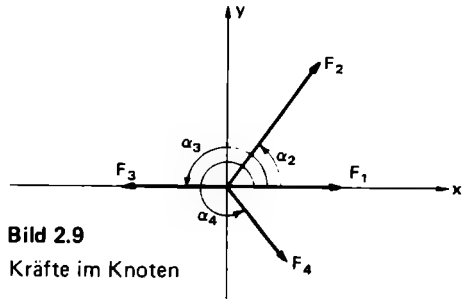


Bild 2.9
Kräfte im Knoten

systems zur Festlegung der Kraftangriffsrichtung, denn die Kräfte können nur längs der Stabrichtung wirken, so muß die Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (2.1.17)$$

erfüllt sein. In Komponentenschreibweise heißt dies

$$\sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i = 0. \quad (2.1.18)$$

Damit liegt ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen vor. Folglich lassen sich damit zwei unbekannte Stabkräfte bestimmen.

Seien also F_i , $i = 1, 2$ die unbekannten und F_j , $j = 1, \dots, n$ bekannte Stabkräfte, so ergibt sich

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = - \sum_{j=1}^n F_j \cos \alpha_j \quad (2.1.19)$$

$$F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = - \sum_{j=1}^n F_j \sin \alpha_j.$$

In Matrixschreibweise

$$A F = F' \quad (2.1.20)$$

mit $F = (F_1, F_2)^T$ und $F' = \left(- \sum_{j=1}^n F_j \cos \alpha_j, - \sum_{j=1}^n F_j \sin \alpha_j \right)^T$, sowie der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung läßt sich wiederum sehr gut mit dem Solid-State-Softwareprogramm ML-02 bestimmen. Bild 2.10 zeigt das Flußdiagramm und nach Tabelle 2.5, der Speicherplatzbelegung, folgt in Tabelle 2.6 das Programm.

Die Eingabe der Wirkrichtung der unbekannten Kräfte sowie die Eingabe der bekannten Kräfte und ihrer Wirkrichtungen muß nicht nach einem bestimmten Umfahrsinn, ähnlich dem zeichnerischen Cremonaplan-Verfahren, erfolgen. Die Reihenfolge der Eingabe der Wirkrichtungen stimmt mit der Reihenfolge der Ausgabe berechneter Stabkräfte überein. Die richtige Behandlung wird im Anwendungsbeispiel gezeigt.

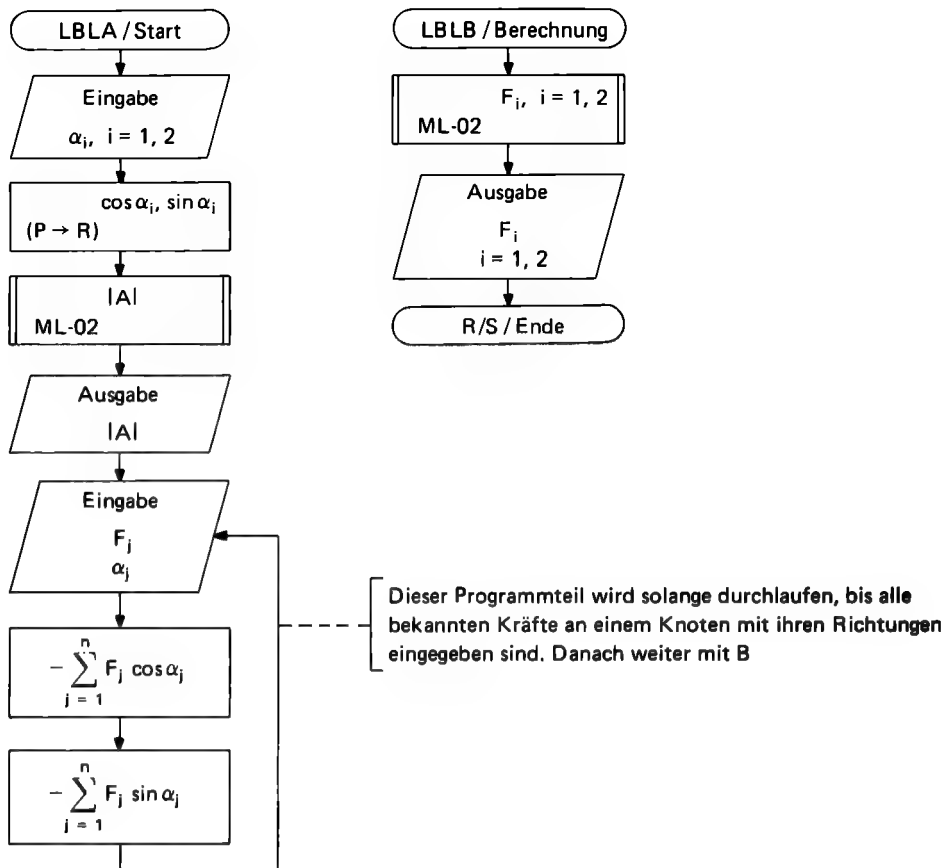


Bild 2.10 Flußdiagramm zu Stützkräfte in Tragwerken

Tabelle 2.5 Speicherplatzbelegung

00 Zähler	08 $\cos \alpha_1$	$\left\{ \begin{array}{l} 14 - F_j \sin \alpha_j \mid F_1 \\ 15 - F_j \cos \alpha_j \mid F_2 \end{array} \right.$
01 F_j	09 $\sin \alpha_1$	
07 2	10 $\cos \alpha_2$	
	11 $\sin \alpha_2$	

Tabelle 2.6 Programm Stützkkräfte in Tragwerken

Start

000 76 LBL
001 11 A
002 47 CMS
003 02 2
004 42 STD
005 07 07

Winklereingabe und Koeffizientenberechnung

006 01 1
007 32 X/T
008 00 0
009 91 R/S
010 99 PRT
011 37 P/R
012 42 STD
013 09 09
014 32 X/T
015 42 STD
016 08 08
017 01 1
018 32 X/T
019 91 R/S

020 99 PRT
021 37 P/R
022 42 STD
023 11 11
024 32 X/T
025 42 STD
026 10 10

Berechnung der Determinanten

027 36 PGM
028 02 02
029 13 0
030 01 1
031 94 +/-
032 49 PRD
033 12 12
034 49 PRD
035 13 13
036 01 1
037 06 6
038 44 SUM
039 12 12
040 44 SUM
041 13 13

Eingabe bekannter Kräfte + Winkel

042 76 LBL
043 16 A'
044 91 R/S
045 99 PRT
046 42 STD
047 01 01
048 01 1
049 32 X/T
050 91 R/S
051 99 PRT
052 37 P/R
053 65 X
054 43 RCL
055 01 01
056 95 =
057 22 INV
058 74 SM+
059 12 12
060 32 X/T
061 65 X
062 43 RCL
063 01 01
064 95 =

065 32 INV
066 74 SM+
067 13 13
068 16 A'

Lösungsbestimmung

069 76 LBL
070 12 B
071 25 CLR
072 36 PGM
073 02 02
074 15 E

Ausgabe

075 43 RCL
076 14 14
077 99 PRT
078 43 RCL
079 15 15
080 99 PRT
081 91 R/S

2.1.4 Biegeträger

Die idealisierte Vorstellung, daß äußere Kräfte nur in den Knotenpunkten eines Fachwerkes angreifen, trifft in der Realität nicht zu. Durch auftretende Flächen- und Punktlasten außerhalb der Auflager werden Stäbe auch auf Biegung beansprucht. Natürlich gibt es auch einfache Biegeträger.

Das nachfolgende Programm soll die Möglichkeit bieten, neben einem Rumpfprogramm z.B. die Gleichung der elastischen Linie eines beliebigen Belastungsfalls einlesen zu können.

Dies setzt die Aufteilung

Magnetkartenseite 1: Spezialprogramme

Magnetkartenseite 2: Rumpfprogramme

voraus. Gehen wir von der Annahme aus, daß die Spezialgleichungen als Hauptprogramme abgefaßt werden, so wird das Rumpfprogramm als Unterprogramm ausgebildet. Eine mögliche Zuordnung wäre:

LBL E: Eingabe

LBL A: Gleichung der Balkendurchbiegung

LBL B: Gleichung der Balkenneigung

LBL C: Gleichung des Querkraftverlaufs

LBL D: Gleichung des Momentenverlaufs

usw.

Betrachten wir als konkretes Beispiel einen nach Bild 2.11 einseitig eingespannten Träger, durch Punkt- und Streckenlast belastet. Das Moment an einer beliebigen Stelle x ergibt sich nach Bild 2.11 aus dem Ansatz

$$M(x) = F(l-x) + q(l-x) \frac{l-x}{2}. \quad (2.1.21)$$

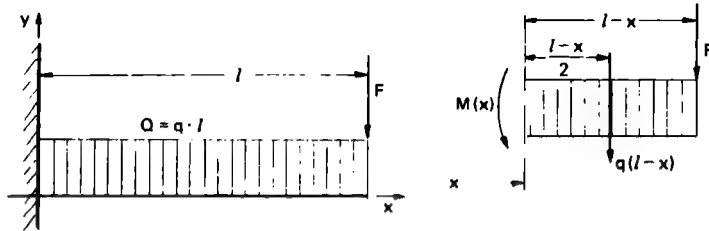


Bild 2.11 Einseitig eingespannter Träger mit Punkt- und Streckenlast

Durch Einsetzen in die allgemeine Gleichung der elastischen Linie

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad (2.1.22)$$

ergibt sich

$$y'' = -\frac{1}{EI} \left(F(l-x) + \frac{q}{2} (l-x)^2 \right). \quad (2.1.23)$$

Eine Integration führt auf die Gleichung der Balkenneigung

$$y' = -\frac{1}{EI} \left(Flx - \frac{F}{2} x^2 + \frac{q}{2} l^2 x - \frac{q}{2} lx^2 + \frac{q}{6} x^3 + c_1 \right). \quad (2.1.24)$$

Mit der Randbedingung $y'(x=0) = 0$ folgt $c_1 = 0$.

Eine nochmalige Integration führt auf die Gleichung der Durchbiegung

$$y = -\frac{1}{EI} \left(\frac{F}{2} lx^2 - \frac{F}{6} x^3 + \frac{q}{4} l^2 x^2 - \frac{q}{6} lx^3 + \frac{q}{24} x^4 + c_2 \right). \quad (2.1.25)$$

Mit der Randbedingung $y(x=0) = 0$ folgt $c_2 = 0$.

Damit erhalten wir die 3 Spezialgleichungen:

$$y = -\frac{l^3}{24EI} \left(4F \left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) + Q \left(6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right) \right), \quad (2.1.26)$$

$$y' = -\frac{l^2}{6EI} \left(3F \left(2\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right) + Q \left(3\left(\frac{x}{l}\right) - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \right) \quad (2.1.27)$$

und

$$M(x) = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(2F + Q \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right), \quad (2.1.28)$$

in denen die Laufvariable x nur im Quotienten x/l auftritt. Bezeichnen wir diese Gleichungen allgemein mit $f(x)$, so zeigt Bild 2.12 das Flußdiagramm zur Berechnung von $f(x)$ über den ganzen Träger mit der Schrittweite Δx . Tabelle 2.7 zeigt die Speicherplatzbelegung mit Einteilung fester und freier Belegung. Die feste Belegung ist für ein einwandfreies Funktionieren des Rumpfprogramms notwendig. Auf die freie Belegung greifen nur die Spezialprogramme zurück. Das entsprechende Programm zu diesem allgemeinen Anwendungsfall zeigt Tabelle 2.8.

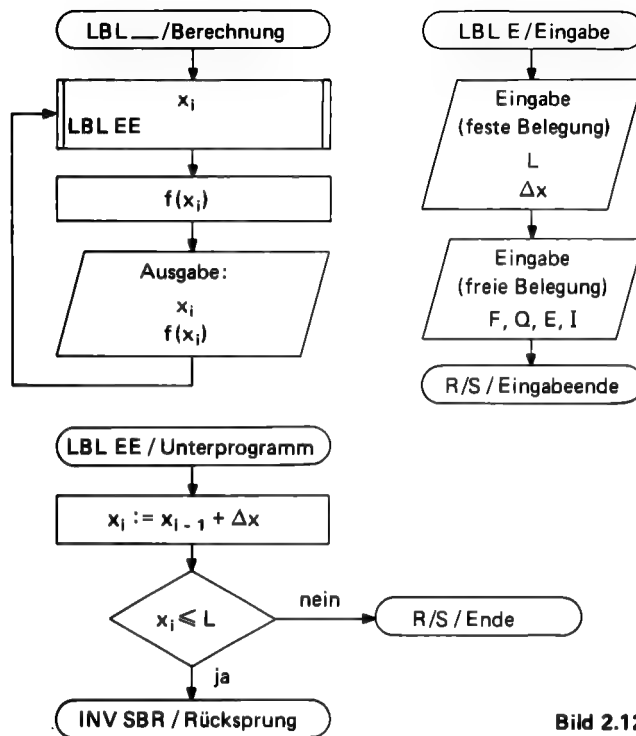


Bild 2.12 Flußdiagramm zum Biegeträger

Tabelle 2.7 Speicherplatzbelegung

feste Belegung:	freie Belegung:
00 Zähler	05 F
01 x/l	06 Q
02 x	07 E
03 l	08 I
04 Δx (Schrittweite)	

Tabelle 2.8 Programm Biegeträger zum T158/59

Eingabeprogramm

```
000 72 S**
001 00 00
002 92 RTN
003 32 X:T
004 01 1
005 44 SUM
006 00 00
007 32 X:T
008 99 PRT
009 81 RST
010 76 LBL
011 15 E
012 47 CNS
013 02 2
014 81 RST
```

Balkendurchbiegung

```
015 76 LBL
016 11 A
017 98 ADV
018 71 SBR
019 52 EE
020 32 X:T
021 99 PRT
022 55 +
023 32 X:T
024 95 =
025 42 S**
026 01 01
027 04 4
028 65 X
029 43 RCL
030 05 05
031 65 X
032 53 1
033 03 3
034 65 X
035 02 2
036 10 E'
037 75 -
038 03 3
039 10 E'
040 54 1
041 85 -
042 43 RCL
043 06 06
044 65 X
045 53 1
046 06 6
047 65 X
048 02 2
049 10 E'
050 75 -
051 04 4
052 65 X
053 03 3
054 10 E'
055 85 -
056 04 4
```

```
057 10 E'
058 54 1
059 95 =
060 65 X
061 43 RCL
062 03 03
063 45 YX
064 03 3
065 55 -
066 43 RCL
067 07 07
068 55 -
069 43 RCL
070 08 08
071 55 -
072 02 2
073 04 4
074 94 +/-
075 95 =
076 99 PRT
077 61 GTO
078 11 A
```

Balkenneigung

```
079 76 LBL
080 12 B
081 98 ADV
082 71 SBR
083 52 EE
084 32 X:T
085 99 PRT
086 55 -
087 32 X:T
088 95 =
089 42 S**
090 01 01
091 03 3
092 65 X
093 43 RCL
094 05 05
095 65 X
096 53 1
097 02 2
098 65 X
099 43 RCL
100 01 01
101 75 -
102 02 2
103 10 E'
104 54 1
105 85 -
106 43 RCL
107 06 06
108 65 X
109 53 1
110 03 3
111 65 X
112 43 RCL
```

```
113 01 01
114 75 -
115 03 3
116 65 X
117 02 2
118 10 E'
119 85 +
120 03 3
121 10 E'
122 54 1
123 95 =
124 65 X
125 43 RCL
126 03 03
127 33 X2
128 55 +
129 43 RCL
130 07 07
131 55 +
132 43 RCL
133 08 08
134 55 +
135 06 6
136 94 +/-
137 95 =
138 65 X
139 01 1
140 08 8
141 00 0
142 55 -
143 89 1
144 95 =
145 99 PRT
146 61 GTO
147 12 B
```

Momentenverlauf

```
148 76 LBL
149 13 C
150 98 ADV
151 71 SBR
152 52 EE
153 32 X:T
154 99 PRT
155 55 -
156 32 X:T
157 95 =
158 94 +/-
159 85 -
160 01 1
161 95 =
162 42 S**
163 01 01
164 65 X
165 43 RCL
166 06 06
167 85 -
168 02 2
```

```
169 65 X
170 43 RCL
171 05 05
172 95 =
173 65 X
174 43 RCL
175 01 01
176 65 X
177 43 RCL
178 03 03
179 55 -
180 02 2
181 95 =
182 99 PRT
183 61 GTO
184 13 C
```

**Unterprogramm
Rumpf**

```
240 76 LBL
241 52 EE
242 43 RCL
243 02 02
244 85 -
245 43 RCL
246 04 04
247 95 =
248 42 S**
249 02 02
250 32 X:T
251 43 RCL
252 03 03
253 22 INV
254 77 GE
255 91 R/S
256 92 RTN
257 76 LBL
258 91 R/S
259 00 0
260 42 S**
261 02 02
262 98 ADV
263 98 ADV
264 98 ADV
265 91 R/S
```

**Unterprogramm
Potenzieren**

```
266 76 LBL
267 10 E'
268 32 X:T
269 53 1
270 43 RCL
271 01 01
272 45 YX
273 32 X:T
274 54 1
275 92 RTN
```


2.1.5 Anwendungsbeispiele

Die jedem Abschnitt folgenden Anwendungsbeispiele sollen Ihnen die Verwendung der zuvor entwickelten Programme demonstrieren. Mit einem Beispiel lassen sich jedoch nicht alle notwendigen Informationen vermitteln. Es liegt an Ihrem Verständnis der Programme, inwieweit Sie diese einsetzen. Anwendungsbeispiele demonstrieren auf anschauliche Weise, welche Programmabläufe sinnvoll oder umständlich sind. Änderungen gehören zur allgemeinen Programmpflege. Ergänzungen und Kommentierung der Programme können, je nach Rechnerart, hinzukommen.

— 1 —

An einem starren Körper greifen an den angegebenen Punkten folgende Kräfte an:

$$a_1 = (3, 0, 0); \quad F_1 = (0, 3, 0)$$

$$a_2 = (0, 1, 0); \quad F_2 = (0, 0, 4)$$

$$a_3 = (0, 0, 2); \quad F_3 = (5, 0, 0).$$

Gesucht ist ihre Wirkung auf den Körper.

Eingabe (Aufruf mit A):

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{l} 3. \\ 0. \\ 0. \end{array} \right\} a_1 & \left. \begin{array}{l} 0. \\ 1. \\ 0. \end{array} \right\} a_2 & \left. \begin{array}{l} 0. \\ 0. \\ 2. \end{array} \right\} a_3 \\ \left. \begin{array}{l} 0. \\ 3. \\ 0. \end{array} \right\} F_1 & \left. \begin{array}{l} 0. \\ 0. \\ 4. \end{array} \right\} F_2 & \left. \begin{array}{l} 5. \\ 0. \\ 0. \end{array} \right\} F_3 \end{array}$$

Die Eingabe Angriffspunkt/Kraft muß in dieser Reihenfolge geschehen. Die Reihenfolge der Indexwerte ist belanglos. Nach jeder Eingabe beginnt das Eingabeprogramm erneut. Sind alle Daten eingegeben, wird mit B das Berechnungsprogramm aufgerufen.

Ausgabe:

Nach Berechnungsende wird durch 1 INV 2nd List der Inhalt der Datenspeicher, beginnend mit 01, aufgelistet. Nach Ausgabe von 17 stoppen Sie mit R/S die Ausgabe ab. Die Zuordnung Datenwert / Datenbezeichnung ergibt sich aus Tabelle 2.1.

Die Bilder 2.13 und 2.14 geben den Sachverhalt dieses Beispiels bildlich wieder.

6.88	01	M_{f3}	} M_f
5.16	02	M_{f2}	
8.6	03	M_{f1}	
0.76	04	a_{f3}	} a_f
-0.58	05	a_{f2}	
-0.26	06	a_{f1}	
9.	07	M_{u3}	} M_u
10.	08	M_{u2}	
4.	09	M_{u1}	
4.	10	F_{r3}	} F_r
3.	11	F_{r2}	
5.	12	F_{r1}	
12.16223664	13	$ M_f $	
.9907572861	14	$ a_f $	
14.03566885	15	$ M_u $	
7.071067812	16	$ F_r $	
1.72	17	p	

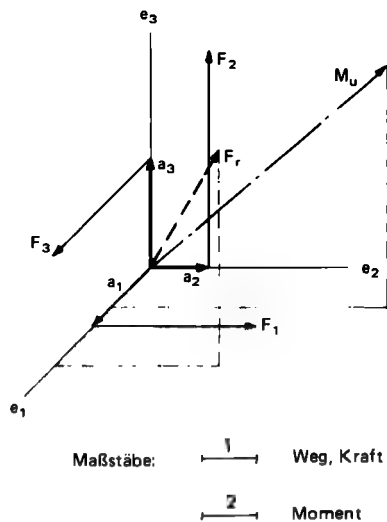


Bild 2.13
Resultierende Kraft und Moment

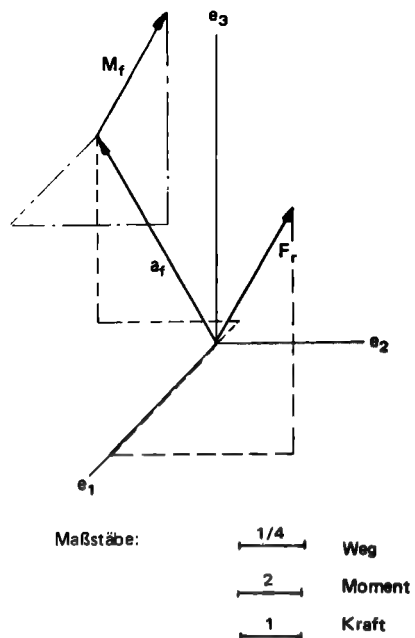


Bild 2.14 Darstellung der Dynamik

Richtungswinkel (Aufruf mit C):

1. M_f			2. a_f			3. M_u			4. F_r		
45.	α_1	105.214033	α_1	73.44185676	α_1	45.	α_1		45.	α_1	
64.89590975	α_2	125.8320153	α_2	44.56372086	α_2	64.89590975	α_2		64.89590975	α_2	
55.55009801	α_3	39.90671286	α_3	50.11689031	α_3	55.55009801	α_3		55.55009801	α_3	

Hier haben Kraft und Moment die gleiche Richtung. Das ihre Richtungswinkel gleich sind, beweist Hilfsprogramm C. Durch Eingabe einer Kennziffer, siehe Bild 2.5 und Aufruf C wird die Berechnung der Richtungswinkel veranlaßt.

— 2 —

Eine Kraft $F = (2.25, -7.5, -2.25)$ soll in drei Komponenten zerlegt werden. Deren Richtungen sind durch die Vektoren

$$a_1 = (4, -5, -0.5)$$

$$a_2 = (-3.5, -5, 2.5)$$

$$a_3 = (0.5, -5, -5.5)$$

vorgegeben.

Eingabe:

$$\left. \begin{array}{r} 2.25 \\ -7.5 \\ -2.25 \end{array} \right\} F$$

$$\left. \begin{array}{r} 4. \\ -5. \\ -0.5 \end{array} \right\} a_1$$

$$\left. \begin{array}{r} -3.5 \\ -5. \\ 2.5 \end{array} \right\} a_2$$

$$\left. \begin{array}{r} 0.5 \\ -5. \\ -5.5 \end{array} \right\} a_3$$

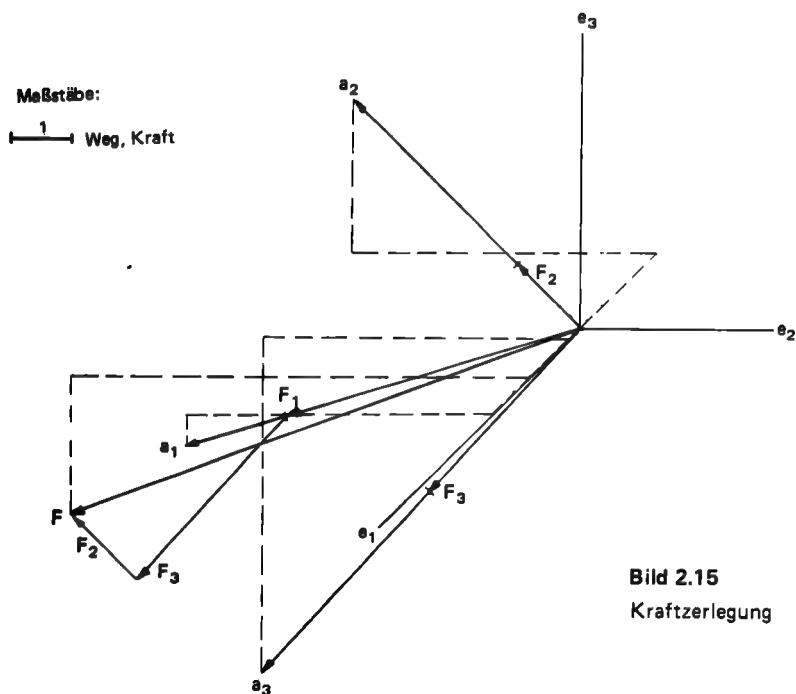
Die Reihenfolge der Vektoreingabe ist mit der Reihenfolge der Komponentenausgabe identisch.

Nach Beendigung der Eingabe wird durch den Aufruf des Solid-State-Softwareprogramms ML-02 die Determinante des, für dieses Problem vorhandenen, Gleichungssystems berechnet und ausgegeben.

.7605156321

4.816962217 F_1
 1.85497115 F_2
 3.49210885 F_3

Nur wenn dieser Wert \neq Null ist, darf das Programm mit R/S wieder gestartet werden. Es erfolgt dann die Ausgabe der Komponenten.



Hinweis:

Wird das Hilfsprogramm LBL C der Kräfte-Reduktion nach der Berechnung eingelesen, so lassen sich mit der Zuordnung:

$$\begin{aligned} n &= 7 \div 3 - F, \\ n &= 10 \div 3 - a_1(F_1), \\ n &= 13 \div 3 - a_2(F_2), \\ n &= 16 \div 3 - a_3(F_3), \end{aligned}$$

die Richtungswinkel der einzelnen Vektoren bestimmen.

– 3 –

Das in Bild 2.16 dargestellte Tragwerk wird mit der eingezeichneten Kraft belastet. Gesucht sind die Stabkräfte. Die Auflagerkräfte ergeben sich aus dem äußeren Gleichgewichtszustand zu

$$\left. \begin{aligned} A + B + F &= 0 \\ 12 \times A + 3 \times F &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= -\frac{3}{12} \times 3,6 = -0,9 \\ B &= -3,6 + 0,9 = -2,7 \end{aligned}$$

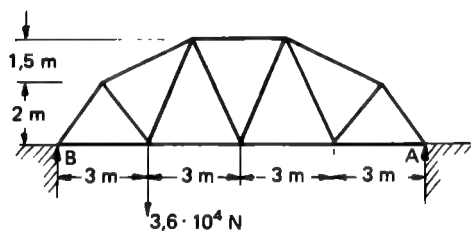


Bild 2.16
Tragwerk

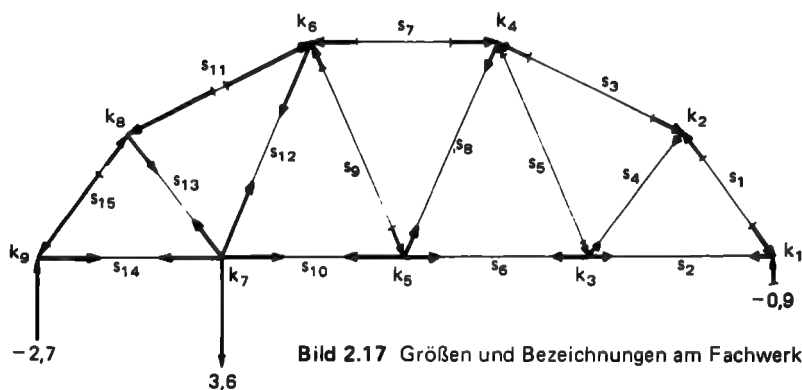


Bild 2.17 Größen und Bezeichnungen am Fachwerk

Für die Beschriftung der jeweiligen Knotenberechnung habe ich das in Tabelle 2.9 wiedergegebene Programm benutzt. Es berechnet für die Zahlen $n = 1$ bis 99 zu jeder Ziffer z ihre Kennziffer k für den Drucker nach der Gleichung

$$k = z + 1 + \text{Int}(z \div 7) \times 2. \quad (2.1.29)$$

Die Beschriftung der n -ten Knotenberechnung erfolgt durch den Programmaufruf $n E$.

1. KNOTEN:			
zu be- rechnen- de Kräfte	126.8698976	1. Winkel	
	180.	2. Winkel	
	0.8	Determinante ≠ Null	
bekannte Größen	-0.9	1. Kraft A	
	270.	1. Winkel	
Ergebnis:	-1.125	1. Kraft S ₁	
	0.675	2. Kraft S ₂	

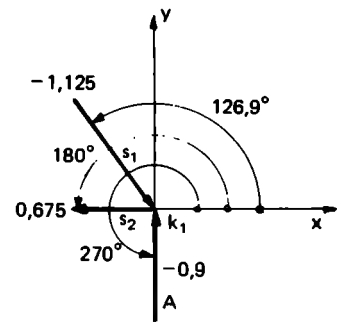


Bild 2.18 Der erste Knoten mit seinen Daten

2. KNOTEN:	4. KNOTEN:	6. KNOTEN:	8. KNOTEN:
153.4349488	180.	206.5650512	26.56505118
233.1301024	246.8014095	246.8014095	233.1301024
.9838699101	0.91914503	.6459432415	-.4473135955
-1.125	-.4450776491	-1.542857143	1.534090908
306.8698976	293.1985905	0.	306.8698976
-1.097706098	-1.097706098	-.9791708279	-3.293118292
.5113636364	333.4349488	293.1985905	-3.174999998
3. KNOTEN:	-1.542857143	-3.293118294	9. KNOTEN:
113.1985905	.9791708279	2.581450365	0.
180.			53.13010235
0.91914503			0.8
0.675	0.91914503	0.8	-2.7
0.	1.157142857	1.928571428	270.
.5113636364	0.	0.	2.025
53.13010235	.9791708279	2.581450365	-3.375
-.4450776491	66.80140949	66.80140949	
1.157142857	3.6	270.	
	-.9791708279		
	1.928571428		
		1.534090908	
		2.025	

Tabelle 2.9 Beschriftungsprogramm zur Knotenberechnung

240	76	LBL	265	00	0	290	01	1	316	03	03
241	15	E	266	00	0	291	85	+	317	85	+
242	47	CMS	267	42	STD	292	53	(318	04	4
243	69	DP	268	02	02	293	32	X:T	319	00	0
244	00	00	269	76	LBL	294	55	-	320	02	2
245	42	STD	270	10	E'	295	07	7	321	06	6
246	01	01	271	43	RCL	296	54)	322	03	3
247	76	LBL	272	01	01	297	59	INT	323	01	1
248	43	RCL	273	55	-	298	65	x	324	95	=
249	55	-	274	01	1	299	02	2	325	69	DP
250	01	1	275	00	0	300	95	=	326	01	01
251	00	0	276	95	=	301	65	x	327	03	3
252	95	=	277	42	STD	302	43	RCL	328	02	2
253	32	X:T	278	01	01	303	02	02	329	03	3
254	01	1	279	22	INV	304	95	=	330	07	7
255	44	SUM	280	59	INT	305	44	SUM	331	01	1
256	00	00	281	22	INV	306	03	03	332	07	7
257	32	X:T	282	44	SUM	307	01	1	333	03	3
258	77	GE	283	01	01	308	00	0	334	01	1
259	43	RCL	284	65	x	309	00	0	335	06	6
260	01	1	285	01	1	310	49	PRD	336	02	2
261	00	0	286	00	0	311	02	02	337	69	DP
262	00	0	287	95	=	312	97	DSZ	338	02	02
263	00	0	288	85	+	313	00	00	339	69	DP
264	00	0	289	32	X:T	314	10	E'	340	05	05
						315	43	RCL	341	91	R/S

— 4 —

Für den in Bild 2.19 dargestellten, einseitig eingespannten Träger mit Strecken- und Punktlast, sind Durchbiegung, Balkenneigung und Momentverteilung gesucht.

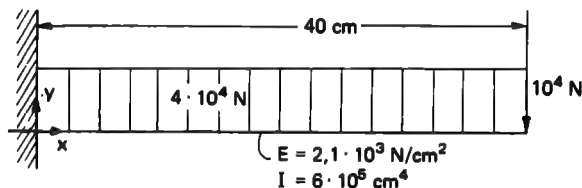


Bild 2.19

Einseitig eingespannter Träger mit Strecken- und Punktlast

Die Eingabe erfolgt durch den Aufruf E:

40.	Trägerlänge l (cm)
2.	Schrittweite x (cm)
10000.	Einzellast F (N)
40000.	Streckenlast Q (N)
2100.	E-Modul (N/cm ²)
600000.	Axiales Widerstandsmoment (cm ³)

Durchbiegung (Aufruf A):

2.	Stelle x (cm)		
-0.001852381	Durchbiegung y (cm)		
4.	14.	24.	34.
-.0072042328	-.0764555556	-.1536285714	-.3347201058
6.	16.	26.	36.
-.0157571429	-.0969620106	-.2207730159	-.3641142857
8.	18.	28.	38.
-.0272253968	-.1191857143	-.2484740741	-.3936619048
10.	20.	30.	40.
-.0413359788	-.1428571429	-.2767857143	-.4232804233
12.	22.	32.	
-.0578285714	-.1677994709	-.3055746032	

Neigung (Grad) (Aufruf B):

2.	Stelle x (cm)		
-.1046481645	Neigung y' (grad)		
4.	14.	24.	34.
-.2005655435	-.5619230524	-.7595783341	-.8390042295
6.	16.	26.	36.
-.2881159198	-0.613095156	-.7834667332	-.8447034921
8.	18.	28.	38.
-.3676630762	-.6580824533	-.8029697395	-.8478562759
10.	20.	30.	40.
-.4395707952	-.6972502269	-.8185111354	-.8488263633
12.	22.	32.	
-.5042028597	-.7309607596	-0.8309443705	

Momentverlauf (Aufruf C):

2.	Stelle x (cm)				
1102000.	Moment M (Ncm)				34.
					78000.
4.	10.	16.	22.	28.	36.
1008000.	750000.	528000.	342000.	192000.	48000.
6.	12.	18.	24.	30.	38.
918000.	672000.	462000.	288000.	150000.	22000.
8.	14.	20.	26.	32.	40.
832000.	598000.	400000.	238000.	112000.	0.

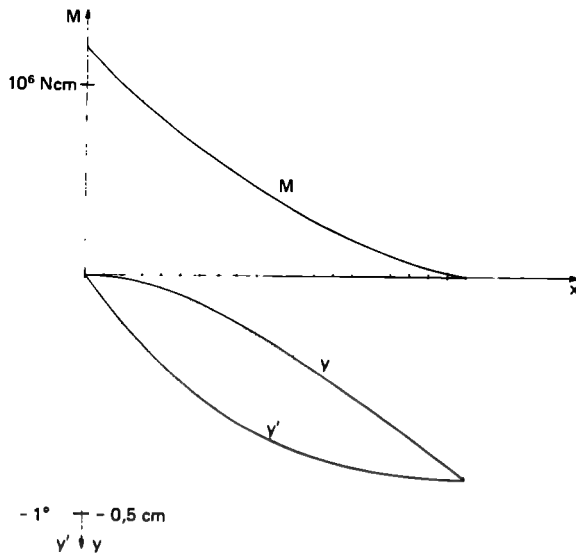


Bild 2.20
Durchbiegungs-, Neigungs-
und Momentenverlauf

2.2 Seiltheorie

Anders wie im vorausgegangenen Abschnitt, geht man bei der mathematischen Formulierung der Theorie gespannter Seile davon aus, daß diese keine Biegemomente übertragen können, mit anderen Worten also biegeschlaff sind. Daraus resultiert, daß Querkräfte nicht und Zugkräfte nur tangential zur Seilachse auftreten. Dies trifft in gleicher Weise auch auf Ketten zu.

2.2.1 Seil unter Eigenlast

Wir setzen ein Seil mit konstantem Querschnitt und homogener Massenverteilung voraus. Wir idealisieren das Seil weiterhin zu (unendlich) vielen und (unendlich) kleinen starren Stücken, die untereinander durch reibungslose Gelenke verbunden sind. Diese können nur Zugkräfte tangential zur Seilachse übertragen. Die Betrachtung eines solchen infinitesimalen Seilelements liefert nach Bild 2.21 folgenden Kraftansatz in vektorieller Schreibweise

$$(r + dr) \times (S + dS) + r \times (-S) + \left(r + \frac{dr}{2}\right) \times q dl = 0. \quad (2.2.1)$$

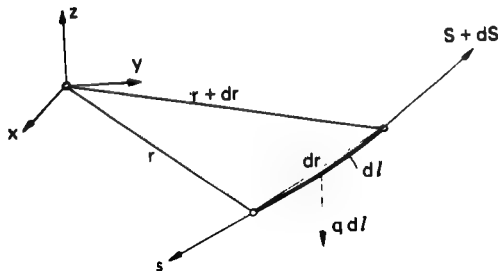


Bild 2.21
Seilelement

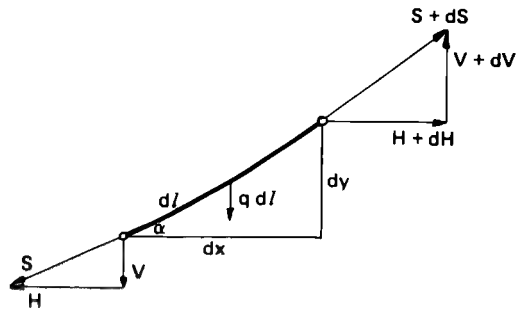
Da wir nachfolgend ausschließlich ebene Belastungszustände betrachten wollen, vereinfacht sich unser Ansatz zu der Betrachtung nach Bild 2.22 mit den Gleichungen

$$H = H + dH \quad (2.2.2)$$

und

$$V + q dl = V + dV. \quad (2.2.3)$$

Bild 2.22
Ebenes Seilelement



Die Seilkraft S zerlegt sich in die Komponenten H und V . Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt sofort, daß

$$dH = 0. \quad (2.2.4)$$

Das heißt, der Horizontalzug H ist längs des Seiles konstant. Weiterhin ist

$$dV = q dl. \quad (2.2.5)$$

Das Neigungsverhalten des Seilelements an der Stelle (x, y) ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}. \quad (2.2.6)$$

Das Verhalten längs des Seiles bestimmt damit die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dV}{H} = \frac{q}{H} dl, \quad (2.2.7)$$

mit

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \quad (2.2.8)$$

folgt weiterhin

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx. \quad (2.2.9)$$

2.2.2 Die Seilkurve als Variationsproblem

Die Differentialgleichung (2.2.9) läßt sich näherungsweise durch eine Differenzengleichung der Form

$$\Delta \tan \alpha = \frac{q}{H} \sqrt{1 + (\tan \alpha)^2} \cdot \Delta x \quad (2.2.10)$$

ersetzen. Sie ist die Grundgleichung unseres Berechnungsalgorithmus. Unter Vorgabe der Streckenlast q , des Horizontalzuges H und eines Wegelements Δx (je kleiner Δx , umso besser die Approximation an die tatsächliche Kurve), läßt sich die Neigungsänderung eines Seilelements gegenüber dem Nachbarelement bestimmen. Auf diese Weise erhalten wir iterativ die Bestimmung aller Seilelemente.

Den Berechnungsalgorithmus in Flußdiagrammform zeigt Bild 2.23. Unter Festlegung der Datenregister nach Tabelle 2.10 folgt unter Tabelle 2.11 das Programm.

Der Vorteil dieses Programms ist bei kleiner Schrittweite eine sehr genaue Annäherung an den tatsächlichen Seilverlauf und die Möglichkeit, auch komplexere Vorgänge wie unter 2.2.5–3– gezeigt, berechnen zu können.

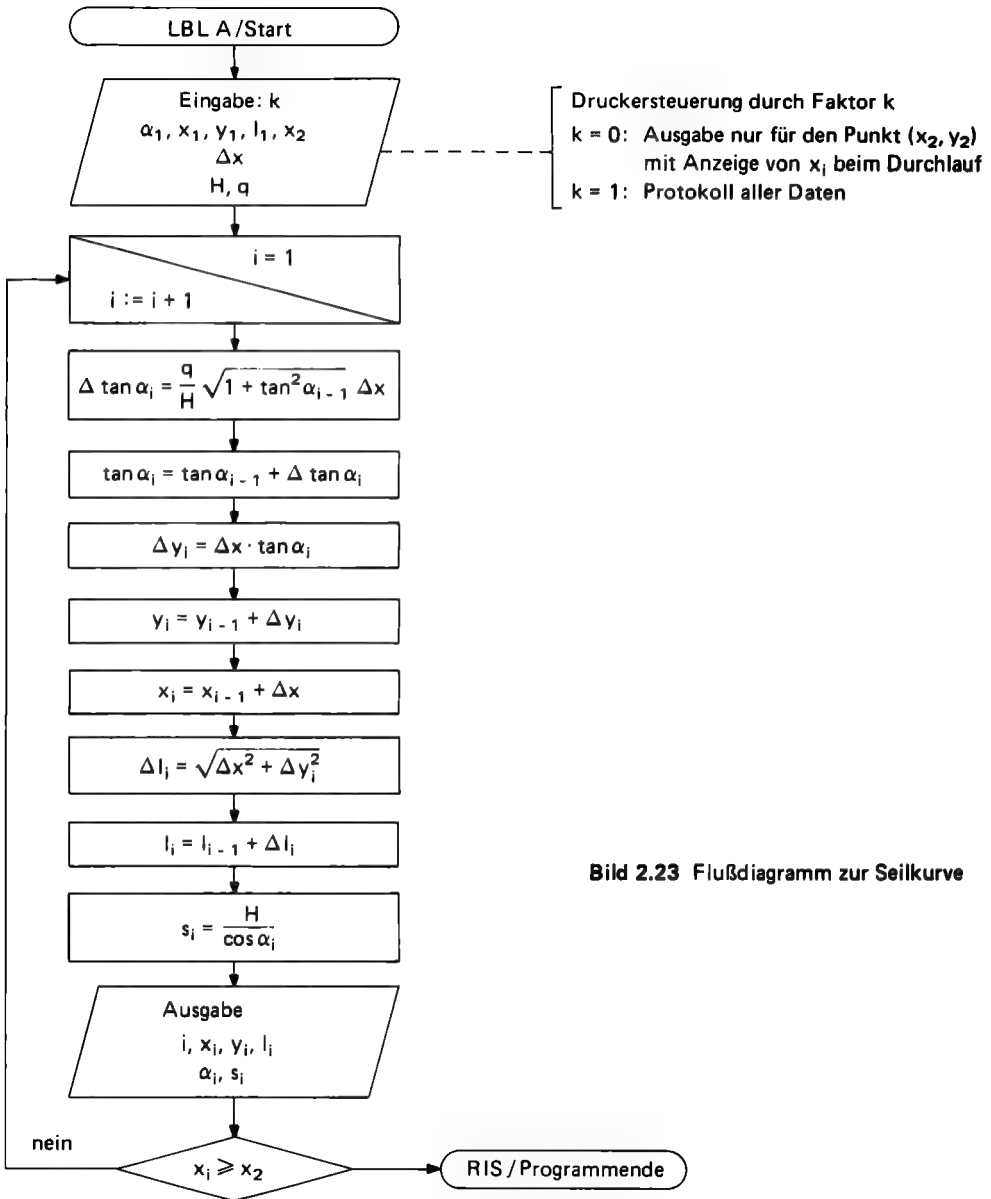


Bild 2.23 Flußdiagramm zur Seilkurve

Tabelle 2.10 Speicherplatzbelegung

01 q	04 l_i	07 x_i
02 H	05 x_2	08 α_1
03 Δx	06 y_i	09 k
10 $\tan \alpha_i$	11 i	

Tabelle 2.11 Programm Seilkurve als Variationsproblem

Eingabe			Zählererhöhung		
000 76 LBL	038 34 ΓX		073 01 1	109 10 10	
001 11 A	039 65 x		074 44 SUM	110 22 INV	
002 47 CMS	040 43 RCL		075 11 11	111 30 TAN	
003 09 9	041 03 03			112 39 COS	
004 42 STD	042 65 x		Abfrage + Rücksprung	113 95 =	
005 00 00	043 43 RCL		076 43 RCL	114 99 PRT	
006 91 R/S	044 01 01		077 05 05	115 98 ADV	
007 99 PRT	045 55 ÷		078 32 $X \uparrow T$	116 92 RTN	
008 72 ST*	046 43 RCL		079 43 RCL		
009 00 00	047 02 02		080 07 07	x-Anzeige bei k = 0	
010 97 DSZ	048 95 =		081 22 INV	117 76 LBL	
011 00 00	049 44 SUM		082 77 GE	118 61 GTD	
012 00 00	050 10 10		083 16 A'	119 43 RCL	
013 06 06			084 91 R/S	120 05 05	
014 98 ADV	Höhenänderung			121 32 $X \uparrow T$	
015 43 RCL	051 43 RCL		SBR/Ausdruck	122 43 RCL	
016 08 08	052 10 10		085 76 LBL	123 07 07	
017 30 TAN	053 65 x		086 17 B'	124 77 GE	
018 42 STD	054 43 RCL		087 87 IFF	125 99 PRT	
019 10 10	055 03 03		088 01 01	126 43 RCL	
020 01 1	056 95 =		089 61 GTD	127 07 07	
021 42 STD	057 44 SUM		090 99 PRT	128 66 PAU	
022 11 11	058 06 06		091 43 RCL	129 92 RTN	
023 32 $X \uparrow T$			092 07 07		
024 43 RCL	Neue Seillänge		093 99 PRT	Ausdruck bei k = 0	
025 09 09	059 33 X^2		094 43 RCL	130 76 LBL	
026 67 EQ	060 85 +		095 06 06	131 99 PRT	
027 16 A'	061 43 RCL		096 99 PRT	132 22 INV	
028 86 STF	062 03 03		097 43 RCL	133 86 STF	
029 01 01	063 44 SUM		098 10 10	134 01 01	
Start/Berechnung	064 07 07		099 22 INV	135 43 RCL	
030 76 LBL	065 33 X^2		100 30 TAN	136 11 11	
031 16 A'	066 95 =		101 99 PRT	137 61 GTD	
Neigungsänderung	067 34 ΓX		102 43 RCL	138 17 B'	
032 01 1	068 44 SUM		103 04 04		
033 85 +	069 04 04		104 99 PRT		
034 43 RCL	Aufruf/Ausdruck		105 43 RCL		
035 10 10	070 43 RCL		106 02 02		
036 33 X^2	071 11 11		107 55 ÷		
037 95 =	072 17 B'		108 43 RCL		

Der Nachteil dieses Programms ist, daß es sich hier um ein Variationsproblem handelt, d. h. man muß mit mehreren Berechnungen, unter Variation von Anfangsneigungswinkel α_1 und Horizontalzug H , sich auf den zweiten Aufhängungspunkt 'einschießen'. Dies wird in 2.2.5–1 – anschaulich vorgeführt. Zu diesem Zweck ist auch die Kennziffer k im Programm vorhanden. Für $k = 0$ wird nur der letzte Programmdurchlauf, also die Daten für den 2. Aufhängungspunkt, ausgedruckt. Hat man sich dann 'eingeschossen', wird mit $k = 1$ der gesamte Seilverlauf mit der Schrittweite Δx protokolliert.

Es liegt nun nahe, die Lösung der Differentialgleichung oder eine Näherung dafür zu suchen, um die Startwerte des Iterationsvorganges besser bestimmen zu können.

2.2.3 Die exakte Lösung

Bringt man die Differentialgleichung (2.2.9) auf die Form

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{H} dx, \quad (2.2.11)$$

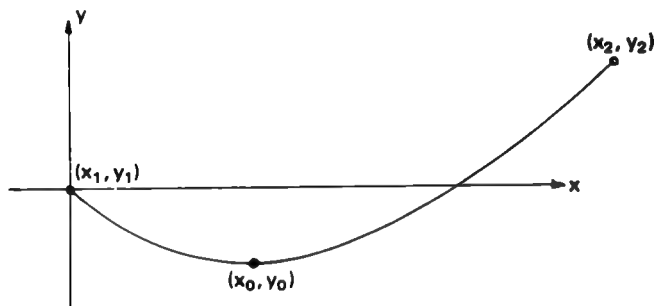
dann liefert eine erste Integration

$$\operatorname{arsinh} y' = \frac{q}{H} x + c_1. \quad (2.2.12)$$

Sei der tiefste Punkt der Seilkurve die Stelle (x_0, y_0) , nach Bild 2.24, dann bestimmt sich die Integrationskonstante c_1 aus der Randbedingung $y'(x_0) = 0$ zu

$$c_1 = -\frac{q}{H} x_0. \quad (2.2.13)$$

Bild 2.24
Seilkurve



Wir erhalten somit

$$y' = \sinh \left(\frac{q}{H} (x - x_0) \right). \quad (2.2.14)$$

Durch nochmalige Integration wird daraus

$$y = \frac{H}{q} \cosh \left(\frac{q}{H} (x - x_0) \right) + c_2. \quad (2.2.15)$$

Mit dem Koordinaten-Nullpunkt in (x_1, y_1) , Bild 2.24, bestimmt sich c_2 aus der Randbedingung $y(x_1) = 0$, zu

$$c_2 = \frac{H}{q} \cosh \left(\frac{q}{H} x_0 \right). \quad (2.2.16)$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y = \frac{H}{q} \left(\cosh \left(\frac{q}{H} (x - x_0) \right) - \cosh \left(\frac{q}{H} x_0 \right) \right). \quad (2.2.17)$$

Die Unbekannten x_0 und y_0 ergeben sich mittels Randbedingungen aus den Gleichungen

$$x_0 = \frac{x_2}{2} - \frac{H}{q} \operatorname{artanh} \left(\frac{y_2}{l} \right) \quad (2.2.18)$$

und

$$y_0 = -\frac{H}{q} \left(\cosh \left(\frac{q}{H} x_0 \right) - 1 \right). \quad (2.2.19)$$

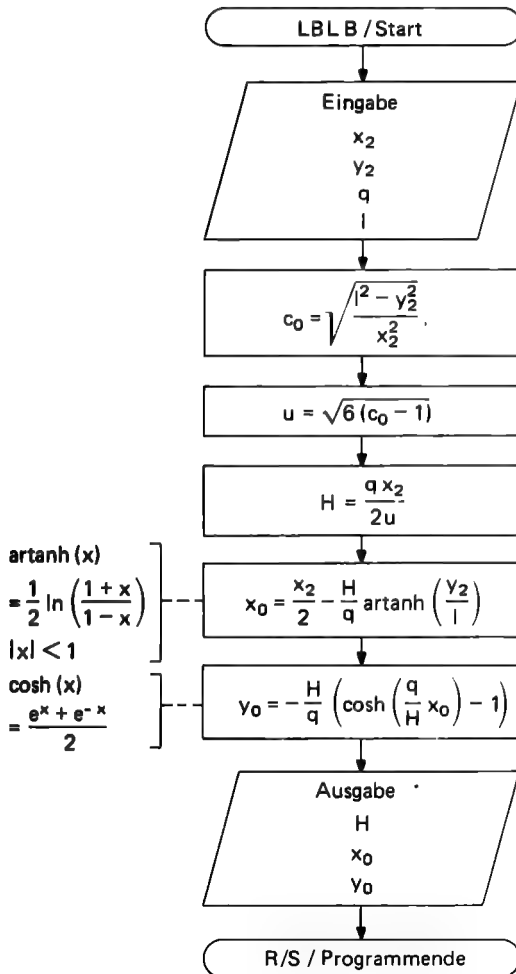


Tabelle 2.12
Speicherplatzbelegung

01	l
02	q
03	y ₂
04	x ₂
05	H
06	y ₂ /l
07	qx ₀ /H

Bild 2.25
Flußdiagramm zur exakten Lösung

Sind also die Aufhängungspunkte, die Seillänge und das spezifische Gewicht des Seiles bekannt, können alle übrigen Werte ermittelt werden. Der Horizontalzug H ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{qx_2}{2H} \sqrt{\frac{l^2 - y_2^2}{x_2^2}} = \sinh\left(\frac{qx_2}{2H}\right). \quad (2.2.20)$$

Durch Kürzung auf die Form

$$u_0 = \sinh(u) \quad (2.2.21)$$

mit $u = \frac{qx_2}{2H}$ und $c_0 = \sqrt{\frac{l^2 - y_2^2}{x_2^2}}$ erhalten wir die goniometrische Gleichung

$$u_0 - \sinh(u) = 0, \quad (2.2.22)$$

deren Lösung nur graphisch oder durch eines der üblichen Näherungsverfahren, wie Newton-Cotes oder Regula falsi, bestimmt werden. Mit der Größe u ist dann auch der Horizontalzug H gegeben. Ein ausführliches Beispiel dazu ist 2.2.5–1—.

Tabelle 2.13 Exakte Lösung

Eingabe	u:				
000 76 LBL	026 34 FX	054 06 06	085 55 +		
001 12 B	027 75 -	055 85 +	086 43 RCL		
002 47 CMS	028 01 1	056 01 1	087 05 05		
003 04 4	029 95 =	057 95 =	088 95 =		
004 42 STD	030 65 x	058 55 +	089 42 STD		
005 00 00	031 06 6	059 53 <	090 07 07		
006 91 R/S	032 95 =	060 01 1	091 22 INV		
007 99 PRT	033 34 FX	061 75 -	092 23 LNX		
008 72 ST*		062 43 RCL	093 85 +		
009 00 00		063 06 06	094 43 RCL		
010 97 DSZ	H:	064 95 =	095 07 07		
011 00 00	034 35 1/X	065 23 LNX	096 94 +/-		
012 00 00	035 65 x	066 65 x	097 22 INV		
013 06 06	036 43 RCL	067 43 RCL	098 23 LNX		
014 98 ADV	037 02 02	068 05 05	099 95 =		
	038 65 x	069 55 +	100 55 +		
	039 43 RCL	070 43 RCL	101 02 2		
c ₀ :	040 04 04	071 02 02	102 95 =		
015 33 X²	041 55 +	072 95 =	103 75 -		
016 75 -	042 02 2	073 94 +/-	104 01 1		
017 43 RCL	043 95 =	074 85 +	105 95 =		
018 03 03	044 99 PRT	075 43 RCL	106 65 x		
019 33 X²	045 42 STD	076 04 04	107 43 RCL		
020 95 =	046 05 05	077 95 =	108 05 05		
021 55 +		078 55 +	109 55 +		
022 43 RCL	x ₀ :	079 02 2	110 43 RCL		
023 04 04	047 43 RCL	080 95 =	111 02 02		
024 33 X²	048 03 03	081 99 PRT	112 95 =		
025 95 =	049 55 +		113 94 +/-		
	050 43 RCL	Yo:	114 99 PRT		
	051 01 01	082 65 x	115 98 ADV		
	052 95 =	083 43 RCL	116 98 ADV		
	053 42 STD	084 02 02	117 91 R/S		

Die wichtigsten Gleichungen wollen wir wieder in einem Programm zusammenfassen. Die Benutzung eines Näherungsverfahrens wollen wir dadurch umgehen, daß wir für $\sinh(u)$ die ersten beiden Terme der Reihenentwicklung setzen. Wir erhalten so

$$uc_0 - \left(u + \frac{u^3}{6}\right) = 0. \quad (2.2.23)$$

Durch Ausklammern von u folgt

$$c_0 - 1 - \frac{u^2}{6} = 0. \quad (2.2.24)$$

Diese quadratische Gleichung ist lösbar nach der Formel

$$u = \sqrt{6(c_0 - 1)}, \quad (2.2.25)$$

dabei ist nur die positive Lösung real.

2.2.4 Straff gespanntes Seil unter vertikaler Einzellast

Wenn ein Seil straff gespannt verläuft, läßt sich nach Bild 2.26 annähernd

$$dl = \frac{dx}{\cos \alpha} \quad (2.2.26)$$

in die Gleichung (2.2.7) einsetzen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H \cos \alpha}. \quad (2.2.27)$$

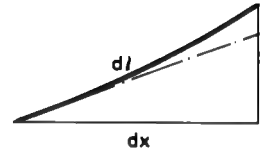


Bild 2.26 Element eines straffen Seiles

Eine zweifache Integration liefert

$$y = \frac{q}{2H \cos \alpha} x^2 + c_1 x + c_2. \quad (2.2.28)$$

Aus der Randbedingung $y(x=0) = 0$ folgt unmittelbar

$$c_2 = 0.$$

Mit der Randbedingung $y(x_2) = y_2$ folgt

$$y_2 = \frac{q}{2H \cos \alpha} x_2^2 + c_1 x_2,$$

also

$$c_1 = \frac{y_2}{x_2} - \frac{q}{2H \cos \alpha} x_2. \quad (2.2.29)$$

Wir erhalten anschließend

$$y = \frac{q}{2H \cos \alpha} (x^2 - x_2 x) + \frac{y_2}{x_2} x. \quad (2.2.30)$$

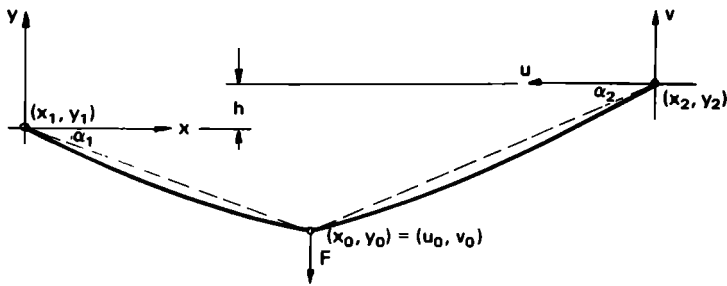


Bild 2.27 Straff gespanntes Seil unter Einzellast

Durch den Trick, in die beiden Aufhängungspunkte des Seiles, siehe Bild 2.27, jeweils einen Koordinaten-Ursprung zu legen, erhalten wir folgende Randbedingungen:

$$y(x=0) = 0,$$

$$v(u=0) = 0,$$

$$y(x=x_0) = h + v(u=u_0).$$

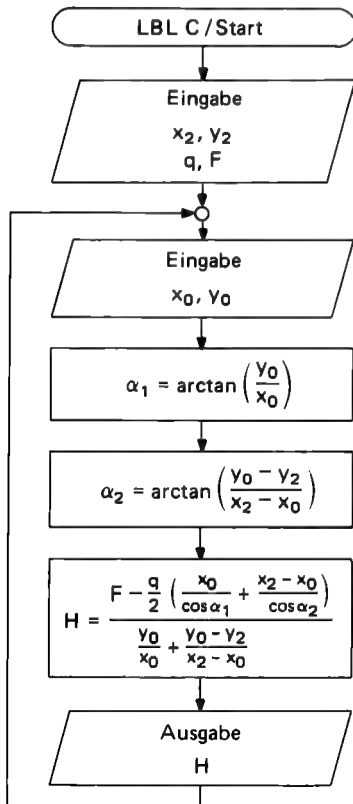


Tabelle 2.14

Speicherplatzbelegung

01 F

02 q

03 y2

04 x2

05 y0

06 x0

07 α1

08 α2

Bild 2.28

Flußdiagramm zum gespannten Seil

Die Seilkurve ergibt sich für das jeweilige Koordinatensystem nach Gleichung (2.2.30) zu

$$y(x) = \frac{q}{2H \cos \alpha_1} (x^2 - x_0 x) + \frac{y_0}{x_0} x \quad (2.2.31)$$

$$v(u) = \frac{q}{2H \cos \alpha_2} (u^2 - u_0 u) + \frac{v_0}{u_0} u. \quad (2.2.32)$$

Aus einer Gleichgewichtsbedingung für annähernd ‚horizontalen‘ Seilverlauf folgt

$$F = Hy'(x_0) + Hv'(u_0). \quad (2.2.33)$$

Durch Einsetzen der Ableitung von (2.2.31) und (2.2.32) für $x_0 = u_0$, erhalten wir daraus die Gebrauchsformel

$$H = \frac{F - \frac{q}{2} \frac{x_0}{\cos \alpha_1} + \frac{(x_2 - x_0)}{\cos \alpha_2}}{\frac{y_0}{x_0} + \frac{y_0 - y_2}{x_2 - x_0}}. \quad (2.2.34)$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich der Horizontalzug näherungsweise vorbestimmen. Sie bildet den Abschluß der Berechnungsprogramme für das Themengebiet Seiltheorie.

Tabelle 2.15 Programm gespanntes Seil

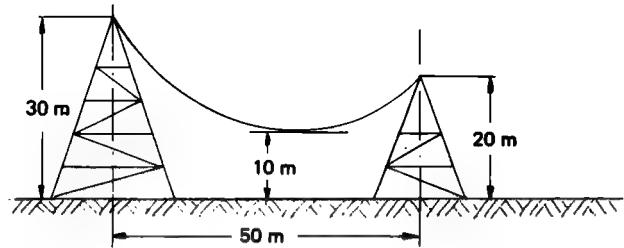
Eingabe/Start			α_1		H:			
000	76	LBL	026	55	+	052	43	RCL
001	13	C	027	43	RCL	053	06	06
002	47	CMS	028	06	06	054	55	+
003	04	4	029	95	=	055	43	RCL
004	42	STD	030	22	INV	056	07	07
005	00	00	031	30	TRN	057	39	CDS
006	91	R/S	032	42	STD	058	85	+
007	99	PRT	033	07	07	059	53	(
008	72	ST*				060	43	RCL
009	00	00	α_2			061	04	04
010	97	DSZ	034	43	RCL	062	75	-
011	00	00	035	05	05	063	43	RCL
012	00	00	036	75	-	064	06	06
013	06	06	037	43	RCL	065	54)
014	98	ADV	038	03	03	066	55	+
			039	95	=	067	43	RCL
			040	55	+	068	08	08
			041	53	(069	39	CDS
			042	43	RCL	070	95	=
			043	04	04	071	65	x
			044	75	-	072	43	RCL
			045	43	RCL	073	02	02
			046	06	06	074	55	+
			047	95	=	075	02	2
			048	22	INV	076	94	+/-
			049	30	TRN	077	85	+
			050	42	STD	078	43	RCL
			051	08	08	079	01	01
						080	95	=
						081	55	+
						082	53	(
						083	43	RCL
						084	05	05
						085	55	+
						086	43	RCL
						087	06	06
						088	85	+
						089	53	(
						090	43	RCL
						091	05	05
						092	75	-
						093	43	RCL
						094	03	03
						095	54)
						096	55	+
						097	53	(
						098	43	RCL
						099	04	04
						100	75	-
						101	43	RCL
						102	06	06
						103	54)
						104	54)
						105	95	=
						106	99	PRT
						107	61	GTO
						108	43	RCL

2.2.5 Anwendungsbeispiele

– 1 –

Zwischen zwei im Abstand von 50 m stehenden Masten der Höhen 30 m und 20 m, soll eine Leitung mit dem spezifischen Gewicht von 50 N/m eine lichte Höhe von 10 m nicht unterschreiten. Siehe Bild 2.29.

Bild 2.29
Hochleitung



Die Wahl der richtigen Seillänge ergibt alle weiteren Startdaten. Bei einer Seillänge von $l = 60$ m ergibt Programm B die gewünschten Werte:

Eingabe: 50. = x_2
-10. = y_2
50. = q
60. = l

Ausgabe: 1190.209946 = H
29.0145547 = x_0
-19.9068824 = y_0

Mit diesen Startwerten berechnet Programm A iterativ die Seilcurve. Ein Problem bleibt die Bestimmung des Startwinkels α_1 . Seine Variation liefert einen Winkel von $\alpha_1 = -57.8^\circ$.

Nachfolgend lediglich der Ausdruck für die richtige Kurve. Sie ergab sich nach 9 Ansätzen. Dabei wurden die ersten Berechnungen mit einer größeren Schrittweite durchgeführt.

Eingabe: 1. = k
-57.8 = α_1
0. = x_1
30. = y_1
50. = x_2
0. = l_1
1. = Δx
1200. = H
50. = q

3.
3.
25.69442167
-53.70273669
5.248694579
2027.113715

Ausgabe: 1. = i = 50. 4.
1. = x_i = 50. 4.
28.49021896 = y_i = 19.76283117 24.40333624
-56.48159163 = α_i = 43.60841803 -52.24071092
1.810922084 = l_i = 60.47744182 6.881759673
2173.106501 = S_i = 1657.297107 1959.678112

2. 5.
2. 5.
27.055893 23.18029518
-55.11611548 -50.72939833
3.55943315 8.4615791
2098.213279 1895.783313

6.	15.	24.	33.	42.
6.	15.	24.	33.	42.
22.02307994	14.26022686	10.56387495	10.37294698	13.63212897
-49.16827807	-32.8697386	-13.05633263	8.307624335	28.43960497
9.991006159	21.91703203	31.69558613	40.74983278	50.37018733
1835.31247	1428.730237	1231.845138	1212.725651	1364.691528
7.	16.	25.	34.	43.
7.	16.	25.	34.	43.
20.92959082	13.66365548	10.37474333	10.56107564	14.22110573
-47.55696358	-30.81909258	-10.7099385	10.65444741	30.49709664
11.47280184	23.08146211	32.71331437	41.76737511	51.53074479
1778.154822	1397.316093	1221.273888	1221.050795	1392.668957
8.	17.	26.	35.	44.
8.	17.	26.	35.	44.
19.89784319	13.11560203	10.22801705	10.7916019	14.85843906
-45.89521812	-28.72509661	-8.347235039	12.98139845	32.51071987
12.90963975	24.22179653	33.72402135	42.79360235	52.7165752
1724.205491	1368.401304	1212.848377	1231.472691	1422.996494
9.	18.	27.	36.	45.
9.	18.	27.	36.	45.
18.9259638	12.61506251	10.12340357	11.06488762	15.54518198
-44.18297067	-26.58977562	-5.972187936	15.28489613	34.47905748
14.30411081	25.3400719	34.72947845	43.83027255	53.92967695
1673.365273	1341.930448	1206.548521	1244.00423	1455.722094
10.	19.	28.	37.	46.
10.	19.	28.	37.	46.
18.01218738	12.1611178	10.06068413	11.38136793	16.28247081
-42.42033173	-24.41542219	-3.588858269	17.56155414	36.40093709
15.65872786	26.43828218	35.73144339	44.87915757	55.17209186
1625.540461	1317.852327	1202.35792	1258.662026	1490.897897
11.	20.	29.	38.	47.
11.	20.	29.	38.	47.
17.15485333	11.75293184	10.03971323	11.74155179	17.07152693
-40.60760895	-22.20459273	-1.201368035	19.80820141	38.27542158
16.97593008	27.51838207	36.73166325	45.94204628	56.44590879
1580.642655	1296.119867	1200.263838	1275.466452	1528.58031
12.	21.	30.	39.	48.
12.	21.	30.	39.	48.
16.35240271	11.38975005	10.06041815	12.14602268	17.91365876
-38.74532201	-19.96009976	1.186135432	22.02189856	40.10179793
18.25808724	28.58229043	37.73187758	47.02074767	57.75326719
1538.588601	1276.69004	1200.257189	1294.441673	1568.83009
13.	22.	31.	40.	49.
13.	22.	31.	40.	49.
15.6033753	11.07089778	10.12279868	12.59543945	18.81026385
-36.83421669	-17.68500024	3.569515457	24.19995032	41.87956463
19.50750393	29.63189358	38.73382135	48.11709408	59.0963609
1499.300024	1259.52378	1202.332531	1315.615686	1611.712441
14.	23.	32.	41.	50.
14.	23.	32.	41.	50.
14.90640692	10.79577897	10.22692686	13.09053733	19.76283117
-34.8752775	-15.38257974	5.944681635	26.33891414	43.60841803
20.7264235	30.66904852	39.73922807	49.23294439	60.47744182
1462.703485	1244.585922	1206.488067	1339.020369	1657.297107

Für das ‚Einschießen‘ auf den zweiten Aufhängungspunkt wird die Kennziffer $k = 0$ eingesetzt. Es erfolgt nur der Ausdruck der letzten Berechnung. Bild 2.30 gibt die ersten 4 Versuche wieder. Die ersten 3 wurden mit der Schrittweite 5 und der letzte mit 1 durchgeführt. Die richtige Kurve mit ausreichender Genauigkeit zeigt Bild 2.31.

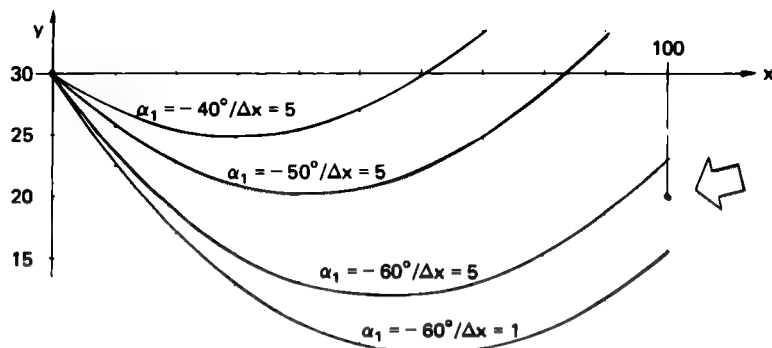


Bild 2.30 ‚Einschießen‘ auf den zweiten Aufhängungspunkt

0.	0.	0.	0.
-40.	-50.	-60.	-60.
0.	0.	0.	0.
30.	30.	30.	30.
50.	50.	50.	50.
0.	0.	0.	0.
5.	5.	5.	1.
1200.	1200.	1200.	1200.
50.	50.	50.	50.
10.	10.	10.	50.
50.	50.	50.	50.
53.62141671	39.87242548	23.15529782	15.29375478
59.1018505	52.31124191	42.25734918	40.54601101
63.45221354	60.06676346	60.13045632	61.41650058
2336.841991	1962.799121	1621.332677	1579.188017

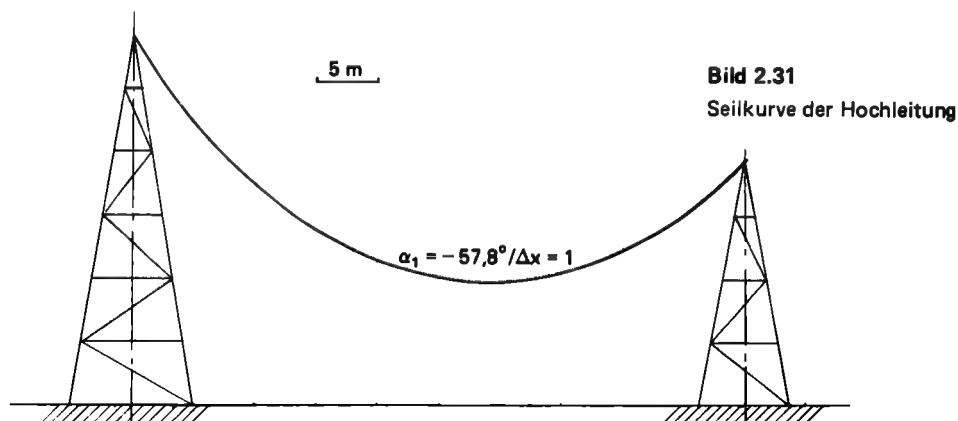


Bild 2.31
Seilkurve der Hochleitung

Auf einer Länge von 1000 m soll eine Seilbahn einen Höhenunterschied von 300 m überwinden. Die Last beträgt 20 kN und das spezifische Tragseilgewicht ist 100 N/m. Wir wollen für diese Seilbahn einen maximalen Durchhang von 50 m zulassen. Damit können wir iterativ für jeden Punkt einer Parallelen im Abstand 50 m zur Steigung

$$y = \frac{300}{1000} x - 50 = 0.3x - 50$$

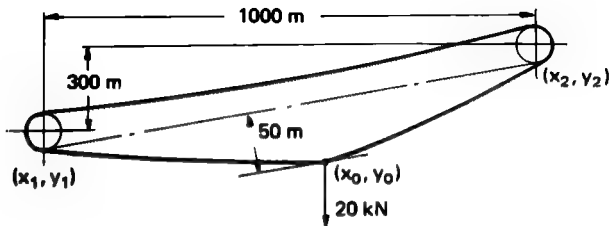


Bild 2.32
Seilbahn

Seilkräfte und Seillänge bestimmen. Doch zunächst errechnen wir den notwendigen Horizontalzug für äquivalente Stellen auf der Parallelen mittels Programm C.

```

Eingabe:      1000. = x2          400.          500.          600.
              300. = y2          70.           100.          130.
              100. = q          155676.4232      162104.608      155651.5429
              20000. = l

Ausgabe:      350. = x0          450.          550.          650.
              55. = y0          85.           115.          145.
              147632.7738 = H      160500.4942      160488.418      147593.484
  
```

Wie zu erwarten war, erhalten wir für die Koordinaten (500, 100) den größten Horizontalzug. Da hier für das Seil auch der größte Durchhang zu erwarten ist, wollen wir für mittigen Lastangriff die Seilkurve ermitteln. Die direkten Winkel betragen $\alpha_1 = 11.3^\circ$ und $\alpha_2 = -21.8^\circ$. Wenn wir diese etwas neigen, bekommen wir gute Startwerte. 10 Versuche ergaben dann folgende Daten:

Linke Kurvenhälfte:

```

Eingabe:      1. = k          2.          4.          6.
              2.1 = α1        40.         80.         120.
              0. = x1        2.207626817    5.404168669    9.591420511
              0. = y1        3.511663764    4.920983102    6.327112255
              500. = x2      40.06163333    80.18691152    120.4092339
              0. = l        162408.9472    162703.7345    163097.4399
              20. = Δx
              162104. = H
              100. = q

Ausgabe:      3.          5.          7.
              60.         100.        140.
              3.683185284    7.37182014    12.05728827
              4.216669551    5.624498951    7.028718872
              60.11591773    100.2866657    140.5606731
              162543.9859    162888.2116    163331.4454
              1. = i
              20. = xi
              0.980287711 = yi
              2.806071754 = αi
              20.02400969 = li
              162298.6033 = Si
  
```

8. 160. 14.77177961 7.729215436 160.7440441 163590.2583	12. 240. 28.12442777 10.51806507 241.8582144 164874.3171	16. 320. 45.49339198 13.28113502 323.729428 166558.6844	21. 420. 72.91598446 16.68947164 427.4359057 169232.8876
9. 180. 17.73528853 8.42849943 180.9624116 163873.9124	13. 260. 32.08870372 11.21149311 262.2473165 165257.7502	17. 340. 50.46777519 13.96715283 344.3387581 167042.7425	22. 440. 79.16987314 17.3641732 448.3908842 169844.2917
10. 200. 20.94824676 9.126469259 201.2188452 164182.4453	14. 280. 36.30453548 11.9032112 282.6868184 165666.2507	18. 360. 55.69643133 14.65108498 365.0109338 167552.1179	23. 460. 85.68229929 18.03635315 469.4244691 170481.4124
11. 220. 24.41112398 9.82302432 221.5164194 164515.8985	15. 300. 40.77254488 12.59312338 303.1798198 166099.8753	19. 380. 61.18013578 15.33284112 385.7490874 168086.8825	24. 480. 92.45423272 18.70592929 490.5398446 171144.3415
		20. 400. 66.91970257 16.01233242 406.5563608 168647.1125	25. 500. 99.48668256 19.37282115 511.7402066 171833.1744

Rechte Kurvenhälfte:

Eingabe:

1. = k	2.	4.	6.
210. = α_1	960.	920.	880.
1000. = x_1			
300. = y_1			
500. = x_2			
99.48668255 = l	277.7590329	256.6440656	236.6420322
-20. = Δx	28.76434269	27.51403013	26.24949603
162104. = H	145.2548142	190.4864744	235.2094279
100. = q	184922.2343	182776.4275	180742.807

Ausgabe:

1. = i	3.	5.	7.
980. = x_i	940.	900.	860.
288.7379229 = y_i	267.061632	246.504722	227.0544696
29.38402909 = α_i	28.14099197	26.88351239	25.61204032
122.4395556 = l_i	167.9359603	212.9098169	257.3887281
186037.6264 = S_i	183835.225	181745.6756	179767.6639

8.
840.
217.7405498
24.97120658
279.4511192
178820.0924

12.
760.
183.1930762
22.37538751
366.5989924
175302.5947

16.
680.
152.9159582
19.73094049
452.1438759
172215.0245

21.
580.
120.9611467
16.36444285
557.1399057
168948.2617

9.
820.
208.6988305
24.32705813
301.3999845
177899.943

13.
740.
175.2265663
21.71865306
388.1272361
174490.7214

17.
660.
146.0048804
19.06278947
473.3042869
171509.3637

22.
560.
115.3454846
15.6838447
577.9133422
168372.8569

10.
800.
199.927911
23.67966028
323.2386893
177007.0704

14.
720.
167.5256666
21.05895008
409.5586116
173705.5845

18.
640.
139.3548747
18.39198106
494.3808753
170829.9639

23.
540.
109.9861201
15.00101738
598.6189643
167823.2085

11.
780.
191.4264322
23.02908032
344.9705816
176141.3334

15.
700.
160.0891822
20.3963536
430.8964021
172947.0592

19.
620.
132.9649068
17.71859753
515.3768675
170176.7162

24.
520.
104.8822166
14.31605135
619.2599388
167299.2271

20.
600.
126.8339824
17.0427229
536.2954772
169549.5158

25.
500.
100.0329764
13.62903854
639.8394221
166800.8275

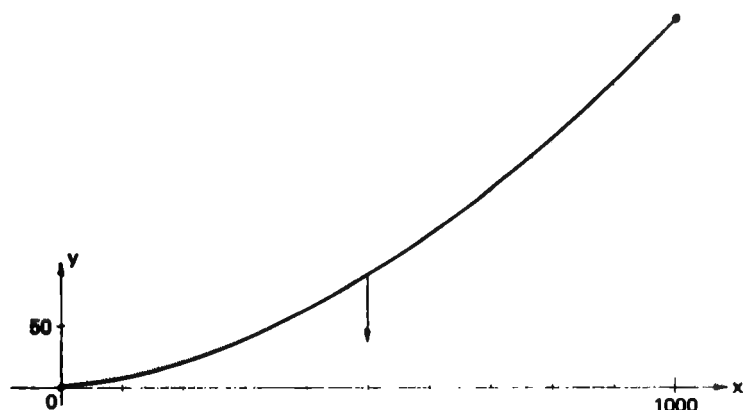


Bild 2.33
Seilkurve der Seilbahn

Die ermittelte Seilcurve zeigt Bild 2.33. Eine Betrachtung der Stelle, an der die Kraft angreift zeigt uns jedoch, daß diese Berechnung nur eine grobe Näherung ist. An dieser Stelle ergibt sich das in Bild 2.34 dargestellte Kräfteverhältnis. Nach der Gleichgewichtsbedingung können die an der Lastangriffsstelle vorhandenen Seilkräfte S und S' , mit ihren vertikalen Komponenten V und V' , nämlich nur eine etwas geringere Vertikallast V' tragen. Es ist

$$V = S \sin(19.4) = 56999.4 \text{ N}$$

$$V' = S' \sin(13.6) = 39304.0 \text{ N}$$

und damit

$$L' = 17695.4 \text{ N} < L = 20000 \text{ N}$$

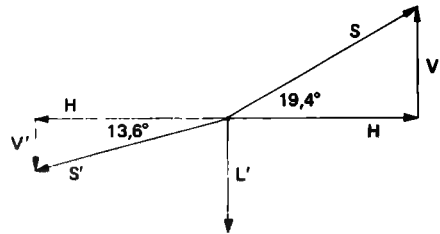


Bild 2.34 Kräfte am Lastangriffspunkt

— 3 —

Dieses Beispiel soll Ihnen einen Einblick geben, welche komplexen Probleme sich mit dem aufgestellten Programm bewältigen lassen.

Dazu betrachten wir eine Seilanordnung mit schief angreifender Einzellast und unterschiedlichen Streckenlasten. Ein rechnerischer Ansatz ist nicht möglich. Unter Annahme des Horizontalzuges und des Anfangswinkels ergeben sich die ersten 10 m linearen Abstand, wie in Bild 2.34 dargestellt. Über diese Entfernung soll lediglich das spezifische Seilgewicht wirken.

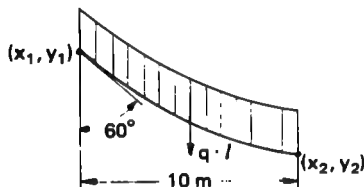


Bild 2.34 1. Seilstück

Eingabe:	1. = k	2.	5.	8.
	-60. = α_1	2.	5.	8.
	0. = x_1	46.83160092	42.75750461	39.41299024
	50. = y_1	-56.94013512	-51.83920199	-46.09616287
	10. = x_2	3.747180752	8.80819844	13.30279154
	0. = l_1	1833.130117	1618.461952	1442.064866
	1. = Δx			
	1000. = H			
	50. = q			
		3.	6.	9.
		3.	6.	9.
		45.38690915	41.56586372	38.44607901
		-55.30943725	-49.99733171	-44.03622086
Ausgabe:	1. = i	5.50420503	10.36383593	14.6938046
	1. = x_i	1757.024277	1555.63749	1391.013058
	48.36794919 = y_i			
	-58.50311437 = α_i			
	1.914050636 = l_i			
	1914.050636 = S_i			
		4.	7.	10.
		4.	7.	10.
		44.03006859	40.45200471	37.54871843
		-53.60955245	-48.08314928	-41.90355151
		7.189736488	11.86072667	16.03740275
		1685.531458	1496.890743	1343.598157

Soll dort nun eine Kraft mit einem horizontalen Anteil von $F_H = 300 \text{ N}$ und einem vertikalen Anteil $F_V = 400 \text{ N}$ angreifen, so ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte

$$V = S \sin \alpha_1 = 897.4 \text{ N}$$

$$H' = H + F_H = 1300 \text{ N}$$

$$V' = V - F_V = 197.4 \text{ N}$$

$$\alpha_2 = \arctan \frac{V'}{H'} = 8.63^\circ$$

Damit haben wir den Ausgangswinkel für den weiteren Seilverlauf. Nach weiteren 10 m linearen Abstand wollen wir die Streckenlast ändern.

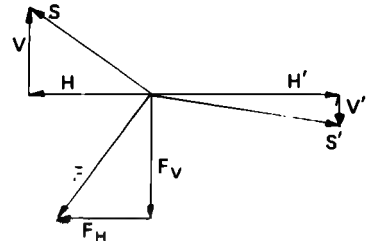


Bild 2.35 Kräfteverhältnisse

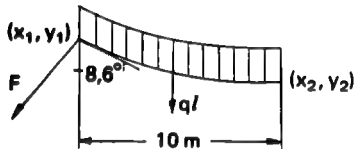


Bild 2.36 2. Seilstück

Eingabe:	1. = k	2.	5.	8.
	-8.632480383 = α_1	12.	15.	18.
	10. = x_1	37.36159721	37.07010978	37.72541245
	37.54871843 = y_1	-4.244005717	2.365389514	8.929064702
	20. = x_2	18.04650691	21.04799865	24.07042833
	16.03740275 = y_1	1303.574489	1301.108618	1315.94763
	Δx			
	1300. = H	3.	6.	9.
	50. = q	13.	16.	19.
		37.32595686	37.44991142	37.92146139
Ausgabe:	1. = i	-2.041177513	4.562628336	11.09209574
	11. = x_1	19.04714182	22.05117775	25.08946473
	37.43580485 = y_1	1300.82539	1304.132827	1324.747321
	-6.44218611 = α_1			
	17.0437573 = y_1	4.	7.	10.
	1308.260913 = S_1	14.	17.	20.
		37.32880247	37.56829687	38.15670403
		1630410618	6.75156261	13.23772549
		20.04714587	23.05816093	26.11676172
		1300.005263	1309.078128	1335.486085

Betrachten wir nun einen Ansatz für eine Streckenlaständerung. Für ein Seilelement mit veränderter Streckenlast ist nach Bild 2.37

$$H = H'$$

$$V + q' \Delta l = V'$$

Das heißt, wir können mit den zuletzt berechneten Daten weiterrechnen und müssen nur die Streckenlast q in q' ändern. Dies soll für weitere 10 m linearen Abstand gelten.

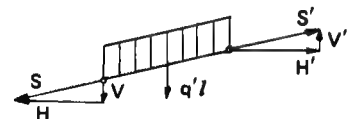


Bild 2.37 Streckenlaständerung am Seilelement

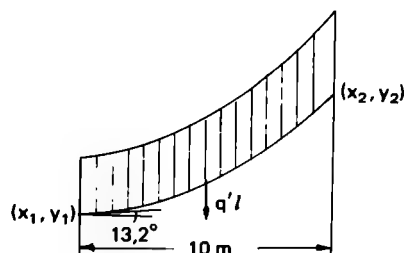


Bild 2.38 3. Seilstück

Eingabe:	1. = k	2.	5.	8.
	13.23772549 = α_1	22.	25.	28.
	20. = x_1	39.10859738	41.90455981	46.82452124
	38.15670403 = y_1	29.18794439	48.62791926	62.52374956
	30. = x_2	28.33676305	32.45341899	38.22682475
	26.11676172 = l_1	1489.075839	1966.876974	2817.628555
	1. = Δx			
	1300. = H	3.	6.	9.
	200. = q	23.	26.	29.
		39.84342438	43.27271849	49.0808962
Ausgabe:	1. = i	36.30945049	53.83658079	66.09761756
	21. = x_i	29.57771862	34.14807476	40.69486607
	38.54949237 = y_i	1613.24224	2203.052505	3208.453713
	21.46913559 = α_i			
	27.1913201 = l_i	4.	7.	10.
	1396.925896 = S_i	24.	27.	30.
		40.76916763	44.90159345	51.71696982
		42.79176592	58.45337613	69.22565508
		30.9404367	36.05941817	43.51424262
		1771.533499	2484.746433	3665.189516

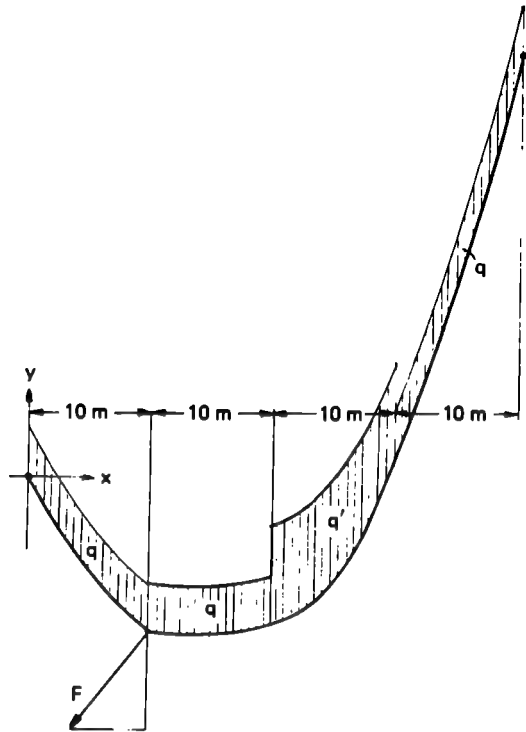
Abschließend sollen noch weitere 10 m linearer Abstand mit dem spezifischen Seilgewicht $q = 50 \text{ N/m}$ folgen.

Den so ermittelten Seilverlauf zeigt Bild 2.39.

Eingabe:	1.	2.	5.	8.
	69.22565508	32.	35.	38.
	30.	57.318339	66.6045225	77.05860749
	51.71696982	70.70817246	72.74222525	74.56736274
	40.	49.46207956	59.2212685	70.09768586
	43.51424262	3934.865635	4381.956049	4885.285055
	1. = Δx			
	1300. = H	3.	6.	9.
	50. = q	33.	36.	39.
		60.29161314	69.95315006	80.82555879
Ausgabe:	1. = i	71.41068599	73.37280704	75.13279236
	31. = x_i	52.59901423	62.71602265	73.99511093
	54.461481	4078.015068	4543.18039	5066.652584
	69.98010031			
	46.43525984	4.	7.	10.
	3797.322391	34.	37.	40.
		63.38553861	73.43619124	84.74241106
		72.08844162	73.98094066	75.67793079
		55.85053308	66.33977428	78.0376017
		4226.974506	4710.877119	5255.238013

Bild 2.39

Seilkurve eines kombiniert belasteten Seiles



2.3 Reibung

Eine bei jedem technischen Prozeß beteiligte und leider auch ebenso notwendige Kraft, ist die Reibungskraft. Sie entsteht an der gemeinsamen Berührfläche zweier Körper, wenn diese sich gegeneinander bewegen oder bewegt werden sollen. Ihre Wirkrichtung ist immer der Bewegung entgegengesetzt. Werden die Körper aus der Ruhe heraus bewegt, so muß die Haftreibung, ansonsten die Gleitreibung überwunden werden.

Eine allgemeingültige Gleichung für alle Reibungsfälle ist leider nicht gegeben, so daß ich mich nachfolgend auf spezielle Anwendungsbeispiele beschränke.

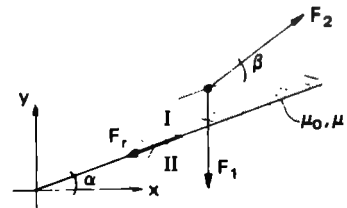
2.3.1 Keil und schiefe Ebene

Die in der Natur aufs vielfältigste verwendete schiefe Ebene, läßt sich auf folgendes Grundprinzip zurückführen. Nach Bild 2.40 wird ein Körper I auf einem Körper II aus der Ruhe oder gleichförmig mittels der Kraft F_2 bewegt. Eine Gewichtskomponente erzeugt die für die Reibung grundlegende Normalkraft. Aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung leitet sich die analytische Lösung

$$F_2 = F_1 \frac{\sin(\alpha \pm \rho)}{\cos(\beta \mp \rho)} \quad (2.3.1)$$

Bild 2.40

Grundprinzip schiefe Ebene



ab. Darin gilt das obere Rechenzeichen für eine Bewegung nach oben, daß untere für die Bewegung nach unten, für Körper I. Ist es eine Bewegung aus der Ruhe heraus, so ist

$$\rho = \arctan \mu_0 \quad (2.3.2)$$

und anderenfalls

$$\rho = \arctan \mu. \quad (2.3.3)$$

Für dieses einfache Programm wollen wir uns ein Flußdiagramm sparen und nur in Tabelle 2.16 und 2.17 die Speicherplatzbelegung und das Rechnerprogramm wiedergeben.

Tabelle 2.16

Speicherplatzbelegung

01 F_1	05 {	+ 1 für eine Bewegung
02 β		nach oben
03 α		- 1 für eine Bewegung
04 $\mu, \mu_0/\rho$	}	nach unten

Tabelle 2.17

Programm schiefe Ebene für den TI58/59

Start

000 76 LBL	011 00 00	022 05 05	035 43 RCL
001 11 A	012 97 DSZ	023 95 =	036 02 02
002 47 CMS	013 00 00	024 42 STD	037 75 -
003 05 5	014 43 RCL	025 04 04	038 43 RCL
004 42 STD	015 98 ADV	026 43 RCL	039 04 04
005 00 00		027 03 03	040 54 >
	Berechnung	028 85 +	041 39 CDS
Eingabe	016 43 RCL	029 43 RCL	042 65 x
006 76 LBL	017 04 04	030 04 04	043 43 RCL
007 43 RCL	018 22 INV	031 95 =	044 01 01
008 91 R/S	019 30 TAN	032 38 SIN	045 95 =
009 99 PRT	020 65 x	033 55 +	046 99 PRT
010 72 ST*	021 43 RCL	034 53 (047 61 GTD
			048 11 A

2.3.2 Gewindereibung

Eine Gewindefläche entsteht durch gleichzeitige Rotation und Translation einer ebenen Kurve, nach Bild 2.41

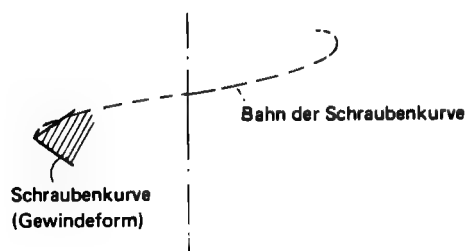


Bild 2.41

Gewinde

Nach der Form der Kurve unterscheidet man Spitz-, Flach-, Trapez-, usw. Gewinde, also die Gewindeform. Bei der Gewindebewegung tritt die Normalkraft senkrecht zur Schraubenfläche nach Bild 2.42 auf. Sie erzeugt eine Reibkraft und ein daraus resultierendes Reibmoment. Die Reibkraft wird dabei mittig zur Schraubenfläche abgenommen. Auch hier ergeben sich aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung die Endgleichungen

$$F = (\cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \tan \rho) N \quad (2.3.4)$$

und

$$M = (\sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \tan \rho) N. \quad (2.3.5)$$

Beim Flachgewinde ist $\beta = 0$ und damit $\cos \beta = 1$, womit als Spezialfall folgt

$$F = (\cos \alpha \pm \sin \alpha \tan \rho) N \quad (2.3.6)$$

und

$$M = (\sin \alpha \mp \cos \alpha \tan \rho) N. \quad (2.3.7)$$

Da die Last allgemein bekannt ist, soll unser Programm die Normalkraft bestimmen und das daraus resultierende Reibmoment. Das Vorzeichen richtet sich nach einer Bewegung gegen die Last (oberes Zeichen) oder mit dieser (unteres Zeichen).

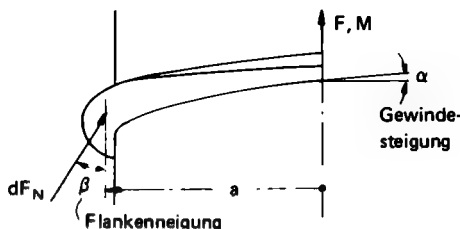


Bild 2.42 Kräfte am Gewinde

Tabelle 2.18

Speicherplatzbelegung

00 Zähler	06	{ + 1 bei Bewegung gegen die Last
01 a		{ - 1 bei Bewegung mit der Last
02 F		
03 μ		
04 β		
05 α		

Tabelle 2.19

Start	Berechnung										
000	76	LBL	016	43	RCL	034	32	X/T	052	06	06
001	11	A	017	05	05	035	43	RCL	053	65	x
002	47	CMS	018	39	COS	036	02	02	054	43	RCL
003	06	6	019	65	x	037	55	+	055	05	05
004	42	STD	020	43	RCL	038	32	X/T	056	39	COS
005	00	00	021	04	04	039	95	=	057	65	x
			022	39	COS	040	99	PRT	058	43	RCL
Eingabe			023	85	+	041	65	x	059	03	03
			024	43	RCL	042	53	<	060	95	=
006	76	LBL	025	06	06	043	43	RCL	061	99	PRT
007	43	RCL	026	65	x	044	05	05	062	91	R/S
008	91	R/S	027	43	RCL	045	38	SIN			
009	99	PRT	028	05	05	046	65	x			
010	72	ST*	029	38	SIN	047	43	RCL			
011	00	00	030	65	x	048	04	04			
012	97	DSZ	031	43	RCL	049	39	COS			
013	00	00	032	03	03	050	75	-			
014	43	RCL	033	95	=	051	43	RCL			
015	98	ADV									

2.3.3 Seilreibung

Durch die Bewegung eines Seiles über eine zylindrische Rolle, wird durch den Andruck des Seiles eine Reibkraft erzeugt. Die Betrachtung eines infinitesimalen Seilelements nach Bild 2.43 liefert durch die Gleichgewichtsbedingung

$$dF_S = dF_r = \mu dF_N. \quad (2.3.8)$$

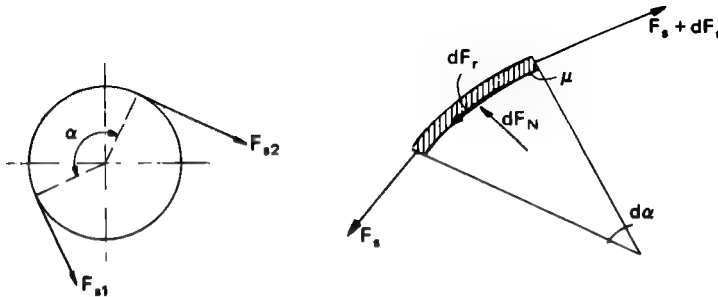


Bild 2.43
Seilreibung

Die Normalkraftkomponente ergibt sich angenähert durch

$$dF_N = F_S \cdot d\alpha. \quad (2.3.9)$$

Die Betrachtung über den ganzen Umschlingungswinkel liefert das Integral

$$\int_{F_{S1}}^{F_{S2}} \frac{dF_S}{F_S} = \int_0^{\alpha} \mu d\alpha, \quad (2.3.10)$$

womit folgt (die Integrationskonstante entfällt durch Randbedingungen):

$$\ln \left(\frac{F_{S1}}{F_{S2}} \right) = \mu \alpha. \quad (2.3.11)$$

Aufgelöst nach den Kräften erhalten wir die Eytelweinsche Gleichung

$$F_{S1} = F_{S2} \cdot e^{\mu \alpha} \quad (2.3.12)$$

Da $\mu \alpha > 0$, ist die Seilkraft $F_{S1} > F_{S2}$; die Kraft F_{S1} wirkt also immer der Bewegungsrichtung des Seiles nach. Der Wert von α ergibt sich aus der einfachen Umrechnung

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \quad (2.3.13)$$

Tabelle 2.20

Speicherplatzbelegung

01 $\mu \alpha$

Tabelle 2.21

Programm Seilreibung zum T158/59

Start

000	76	LBL	005	42	STD	013	65	X	021	65	X
001	11	A	006	01	01	014	89	π	022	43	RCL
002	47	CMS	007	91	R/S	015	95	=	023	01	01
			008	99	PRT	016	49	PRD	024	22	INV
			009	55	\div	017	01	01	025	23	LN π
			010	01	1	018	91	R/S	026	95	=
003	91	R/S	011	08	8	019	99	PRT	027	99	PRT
004	99	PRT	012	00	0	020	98	ADV	028	91	R/S

2.3.4 Anwendungsbeispiele

— 1 —

Auf einer schiefen Ebene von 20° liegt eine Last von 20 kN. Die Haftreibung beträgt 0.3. Die Last wird durch eine Kraft um 5° zur Ebene gehalten. Gesucht ist die Haltekraft bzw. die Kraft die benötigt wird, um die Last nach oben zu ziehen.

1. nach oben
0.3 μ_0
20. α
5. β
20. F_1

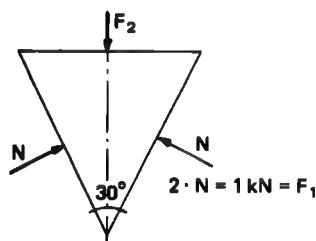
-1. nach unten
0.3 μ_0
20. α
5. β
20. F_1

12. 20586228 F_2 1. 239368745 F_2

Um die Last zu halten wird eine Kraft von 1.24 kN benötigt. Um sie nach oben zu ziehen müssen 12.21 kN aufgebracht werden.

— 2 —

Auf einen Keil nach Bild 2.44 wirken Normalkräfte von 1 kN. Bei einer Haftreibung von 0.3 ergibt sich die Frage, welche Kraft zum Eintreiben des Keiles und welche zum Herausziehen benötigt wird.



Eintreiben:

1.
0.3 μ_0
15. α
0. β
1. F_1

0. 548596793 F_2

Herausziehen:

-1.
0.3 μ_0
15. α
0. β
1. F_1

-. 0309587028 F_2 **Bild 2.44** Keil

Zum Eintreiben werden 0.55 kN und zum Herausziehen 0.031 kN benötigt.

— 3 —

Auf einem spitzen Bewegungsgewinde von 50° Flankenneigung und einer Steigung von 5° , sowie einem Flankenradius von 3 cm bewegt sich eine Last von 10 kN. Bei einem Reibungskoeffizienten von 0.2 ist nach der Normalkraft und dem Reibmoment gesucht.

Last nach oben

1.	
5.	α
25.	β
0.2	μ
10.	F (kN)
3.	a cm
10.86613812	N (kN)
-1.306642366	M (kNcm)

Last nach unten

-1.	
5.	α
25.	β
0.2	μ
10.	F (kN)
3.	a cm
11.29397482	N (kN)
3.14230983	M (kNcm)

Die Bewegung nach unten bewirkt also eine größere Belastung des Gewindes.

— 4 —

Eine Last wird über eine feststehende Umlenkrolle nach oben gezogen. Das Seil, an dem die Last hängt, umschlingt die Rolle mit 120° . Der Reibungskoeffizient beträgt 0.2. Die Last wiegt 500 kN. Es ist nach der Zugkraft gefragt.

0.2	= μ
120.	= α°
500.	= F_{s2}
760.1282119	= F_{s1}

Während wir zuvor in der Statik den Spezialfall behandelt haben, daß äußere Kräfte am starren Körper keine Bewegung hervorrufen, wird in den nachfolgenden Kapiteln die durch Kräfte hervorgerufene Bewegungsänderung untersucht. Dabei wurde keine streng thematische, sondern vielmehr eine für den Rechner interessante Einteilung vorgenommen.

Bei der Kinematik sieht man von der Masse und den am Körper angreifenden Kräften ab und untersucht nur deren Geometrie der Bewegung. Wir betrachten damit die Lageänderung eines Punktes über der Zeit. Dies geschieht bezüglich eines passend gewählten Koordinatensystem.

3.1 Numerische Behandlung von Differentialgleichungen der Bewegung

Soweit in diesem Buch die Problemanalyse auf eine Differentialgleichung führt, siehe auch Seiltheorie, habe ich deren numerische Integration, um Sie nur mit einer Methode zu konfrontieren, nach dem Euler-Cauchy-Verfahren durchgeführt. Daher will ich diese Methode kurz erläutern.

Sei nach Bild 3.1 $y = f(x)$ die analytische Lösung der allgemeinen Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Aus der Differentialgleichung folgt die Anfangsbedingung $y_0 = f(x_0, y_0)$ als bekannter Wert. Geht man nun auf der Abszisse um die Schrittweite Δx weiter, so läßt sich die auftretende Ordinatenzunahme Δy annähernd durch den Wert Δy_n beschreiben. Es gilt

$$y' = \frac{\Delta y_n}{\Delta x} \quad (3.1.1)$$

Aus der Grenzwertbetrachtung folgt

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad (3.1.2)$$

und damit die exakte Lösung. Bei diesem Verfahren wird also der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx}$$

durch den Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

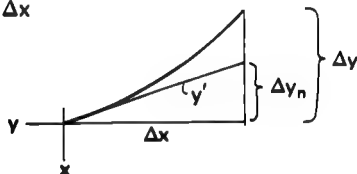
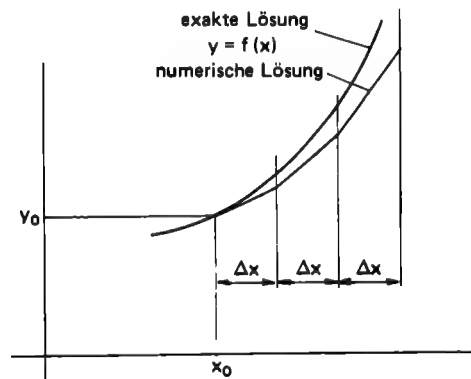


Bild 3.1

Das Euler-Cauchy-Verfahren



angenähert. Wählt man Δx also genügend klein, kommt man der analytischen Lösung beliebig nahe. Den Nachteil dieses Verfahrens zeigt Bild 3.1 ebenfalls deutlich. Mit zunehmenden Schritten entfernt sich die numerische immer mehr von der analytischen Lösung. Wer genauere Verfahren benutzen möchte, kann diese unter [2] und [12] nachlesen. Als Stichwort möchte ich das oft benutzte Runge-Kutta-Verfahren nennen. Betrachtungen zur Fehlergröße der einzelnen Verfahren entnehmen Sie bitte ebenfalls der Literatur.

Speziell in den nachfolgenden Fällen wird das Euler-Cauchy-Verfahren zweimal Anwendung finden, da Massenpunkt oder starrer Körper zur Änderung ihres Bewegungszustandes durch Kräfte F_j , $j = 1, \dots, n$ gezwungen, diesen ihre träge Masse entgegensetzen. Als Gleichung

$$\sum_{j=1}^n F_j = F_r = -m a. \quad (3.1.3)$$

Die Momentanbeschleunigung ergibt sich als Differentialquotient

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad (3.1.4)$$

so daß die 1. Anwendung des Euler-Cauchy-Verfahrens,

$$\Delta v = -\frac{F_r}{m} \Delta t, \quad (3.1.5)$$

die während der Zeiteinheit Δt auftretende Geschwindigkeitsänderung liefert. Für die Momentangeschwindigkeit gilt weiterhin der Differentialquotient

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad (3.1.6)$$

so daß eine 2. Anwendung des Euler-Cauchy-Verfahrens,

$$\Delta s = v \Delta t, \quad (3.1.7)$$

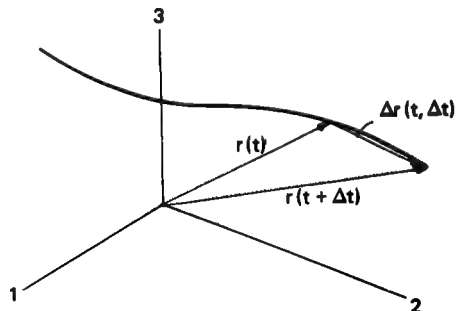
den während der Zeiteinheit Δt zurückgelegten Weg annähernd beschreibt. Die Momentangeschwindigkeit wird dabei aus Einfachheitsgründen für die Berechnung durch die Ausgangsgeschwindigkeit für das Zeitintervall ersetzt.

3.2 Bewegung des materiellen Punktes

Die Lage eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t wird durch den Ortsvektor $r(t)$ bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems bestimmt. Siehe Bild 3.2. In einem Zeitintervall Δt verändert er seine Lage um $\Delta r(t, \Delta t)$ nach $r(t + \Delta t)$. Der Übergang auf ein infinitesimales Zeitintervall dt liefert zum Zeitpunkt t die Momentangeschwindigkeit

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr(t)}{dt}. \quad (3.1.8)$$

Bild 3.2
Raumbewegung



Für das Bogendifferential wird mithin

$$dr = v(t) dt. \quad (3.1.9)$$

Analog definiert man die zum Zeitpunkt t vorhandene Momentanbeschleunigung

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}. \quad (3.1.10)$$

Die Momentangeschwindigkeit und -beschleunigung ergeben sich also als erste bzw. zweite Ableitung der Ortskoordinaten nach der Zeit.

Die Bewegung eines Massenpunktes auf gekrümmter Bahn, läßt sich für ein infinitesimales Bogenelement, das eine Drehung um den imaginären Bahnmittelpunkt M mit dem Krümmungsradius ρ auffassen. Dieser ergibt sich, unter Betrachtung von Bild 3.3, aus der Gleichung

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = |\sqrt{r''(t) r''(t)}|. \quad (3.1.11)$$

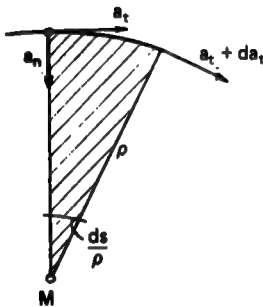


Bild 3.3
Bahnkrümmung

Die bei der Bewegung aufgespannte Kreissektorfläche liegt in der sogenannten Schmiegeebene. Während der Geschwindigkeitsvektor tangential zur Bahnkurve verläuft, besitzt der Beschleunigungsvektor eine Tangential- (a_t) und Normalkomponente (a_n). Das Antragen der zu den Ortsvektoren $r(t)$ einer Bahnkurve gehörenden Geschwindigkeitsvektoren $v(t)$ bezüglich eines beliebigen Geschwindigkeitspoles (O), siehe Bild 3.4, liefert die in Bild 3.5 wiedergegebene Konstruktion. Die so entstehende Raumkurve wird als polarer Hodograph bezeichnet. Danach zerfällt die Geschwindigkeit ebenfalls in einen Normal- und Tangentialanteil

$$\Delta v = \Delta v_n + \Delta v_t. \quad (3.1.12)$$

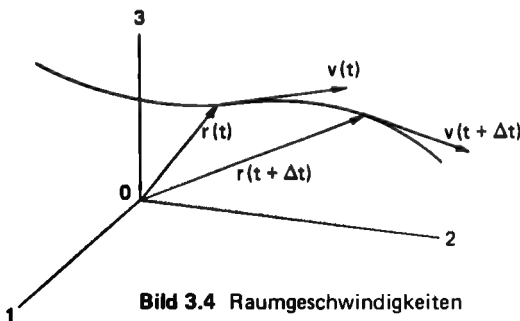


Bild 3.4 Raumgeschwindigkeiten

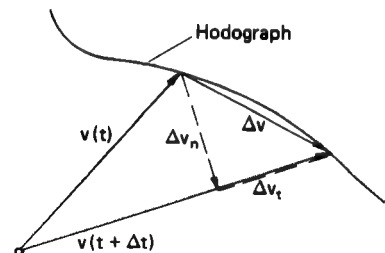


Bild 3.5 Polarer Hodograph

Ihre infinitesimale Betrachtung liefert dann durch Differentiation nach der Zeit die vorangegangene Behauptung

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t. \quad (3.1.13)$$

Ihre Größen ergeben sich aus

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \quad (3.1.14)$$

und

$$\mathbf{a}_t = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{s}}. \quad (3.1.15)$$

3.2.1 Bewegungsdiagramme

Die Bewegungen eines Massenpunktes werden in der Regel durch Zeit-Weg-, bzw. Zeit-Geschwindigkeits- oder Zeit-Beschleunigungsdiagramme dargestellt. Auch eine Kombination der Bewegungsgrößen ist üblich.

Da in den weitaus meisten Fällen die Raumkurve durch einparametrische Gleichungen der Form

$$f_i = f_i(u), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.16)$$

oder durch Meßwerte gegeben ist, womit sich auch eine Interpolations- oder Approximationsgleichung aufstellen läßt, soll dies die Ausgangsbasis für ein Programm sein.

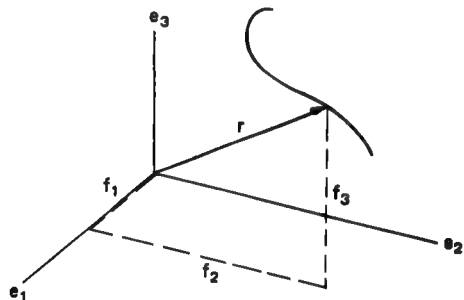
Der Ortsvektor eines Bahnpunktes ergibt sich in seiner Komponentendarstellung aus

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i f_i \quad (3.1.17)$$

wie Bild 3.6 es wiedergibt. Die Momentangeschwindigkeit in diesem Punkt bestimmt sich angenähert durch die Ortsveränderung des Massenpunktes in der Zeitdifferenz Δt .

$$\mathbf{v}(u) = \frac{d\mathbf{r}}{du} \approx \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\Delta f_i}{\Delta u}. \quad (3.1.18)$$

Bild 3.6
Räumliche Bahn



Mit der Größe von Δt läßt sich die exakte Lösung beliebig genau approximieren. Eine zweite Annäherung des Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten liefert die Momentanbeschleunigung

$$\mathbf{a}(u) = \frac{d\mathbf{v}(u)}{du} \approx \frac{\Delta \mathbf{v}(u)}{\Delta u} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\Delta v_i}{\Delta u}. \quad (3.1.19)$$

Die Beträge von Wegzunahme, Geschwindigkeitsänderung und Beschleunigung ergeben sich nach dem pythagoräischen Ansatz über die Komponenten k_i

$$|\dots| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 k_i^2}. \quad (3.1.20)$$

Außer der Bestimmung der Raumkurve mit der Zeit als Parameter durch die Funktionen

$$f_i = f_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1.21)$$

gibt es noch die Bestimmung durch einen geometrischen Parameter, z. B. des Winkels φ . Dessen zeitliche Veränderung wird dann durch die Gleichung

$$\varphi = \varphi(t) \quad (3.1.22)$$

bestimmt. Die Ableitungen eines Ortsvektors nach der Zeit ergeben sich in diesem Fall nach den Regeln der Differentiation angenähert aus

$$v(t) = \frac{\Delta r}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (3.1.23)$$

und

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (3.1.24)$$

Wir erhalten damit einen in Bild 3.7 dargestellten Berechnungsrumpf, in dem die Unterprogramme A', \dots, D' die funktionalen Verhältnisse des jeweiligen Problems widerspiegeln. Auf diese Weise lassen sich z. B. Schubkurbel-, Kolben- oder Nockenbewegungen analysieren.

Tabelle 3.1

Speicherplatzbelegung

07 Σ	08 Σ	09 u_i
10 $f_{3j} - 1$	11 $f_{2j} - 1$	12 $f_{1j} - 1$
13 f_{3j}	14 f_{2j}	15 f_{1j}
16 $v_{3j} - 1$	17 $v_{2j} - 1$	18 $v_{1j} - 1$
19 v_{3j}	20 v_{2j}	21 v_{1j}
22 a_{3j}	23 a_{2j}	24 a_{1j}
25 Δt	26 t_j	27 s_j
28 v_j	29 a_j	

In diesem Programm wurde bewußt aus Platzgründen auf eine Berechnung des Krümmungsradius und auf den Normal- und Tangentialanteil der Beschleunigung verzichtet. Wird die Berechnung gewünscht, so läßt sich dies mit den zuvor erläuterten Formeln leicht programmieren. Auch läßt sich das Programm durch indirekte Programmierung auf weit weniger Programmschritte (für TI 58) bringen.

Dieses Programm soll das einzige in diesem Kapitel bleiben, da sich die praktische Nutzenanwendung erst im nächsten Kapitel ergibt.

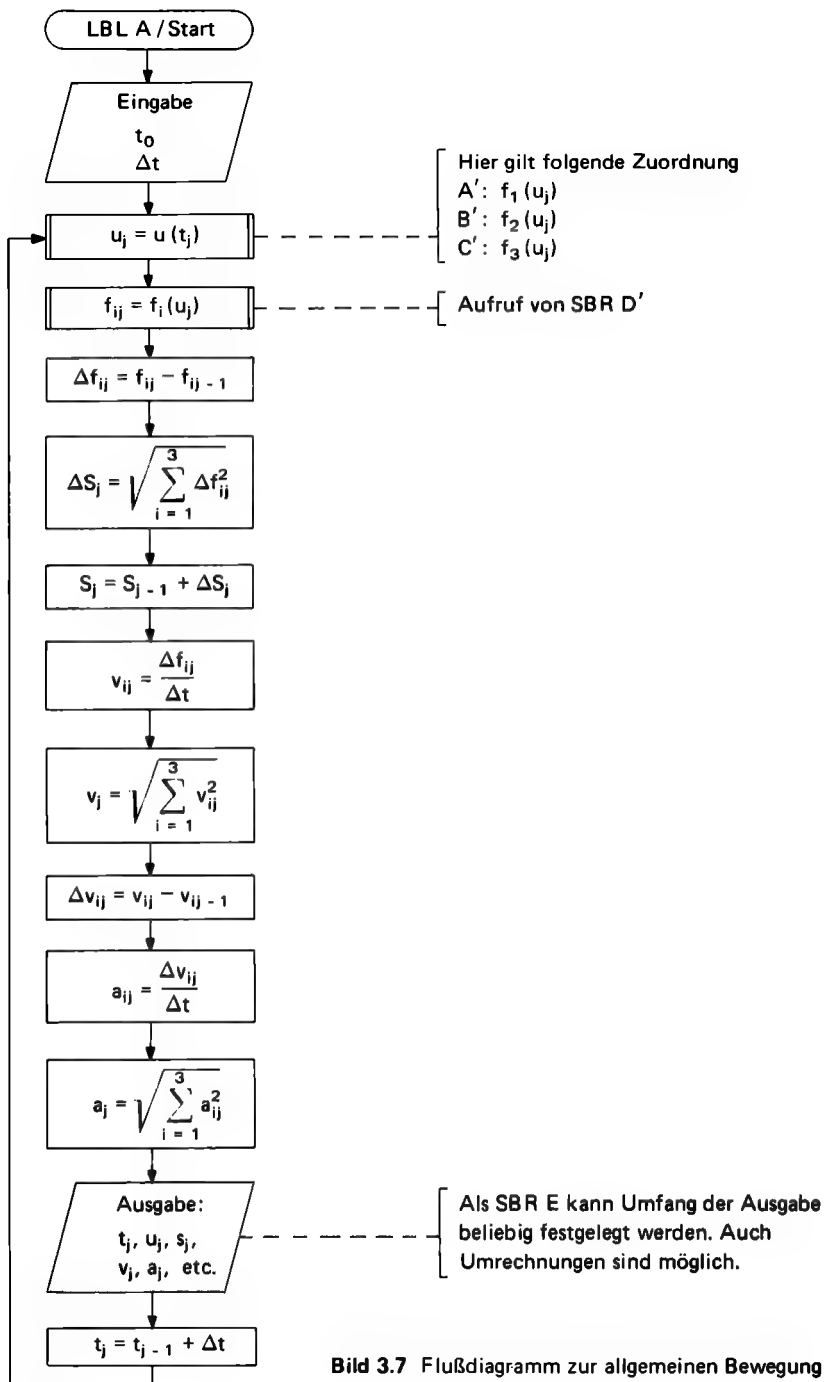


Bild 3.7 Flußdiagramm zur allgemeinen Bewegung

Tabelle 3.2
Programm allgemeine Bewegung
Start + Eingabe

```

000 76 LBL
001 11 A
002 47 CMS
003 91 R/S
004 99 PRT
005 42 STD
006 26 26
007 91 R/S
008 99 PRT
009 42 STD
010 25 25
011 98 ADV
012 61 GTD
013 12 B

```

Ausgabe + Zeitzähler

```

014 76 LBL
015 43 RCL
016 15 E
017 00 0
018 42 STD
019 08 08
020 42 STD
021 07 07
022 43 RCL
023 25 25
024 44 SUM
025 26 26

```

Start-Berechnung

```

026 76 LBL
027 12 B

```

 u_i :

```

028 43 RCL
029 26 26
030 19 D'
031 42 STD
032 09 09

```

 $f_{ij}/\Delta f_{ij}$:

```

033 16 A'
034 42 STD
035 15 15
036 75 -
037 43 RCL
038 12 12
039 95 =
040 42 STD
041 21 21
042 33 X²
043 44 SUM
044 08 08
045 43 RCL
046 09 09
047 17 B'

```

```

048 42 STD
049 14 14
050 75 -
051 43 RCL
052 11 11
053 95 =
054 42 STD
055 20 20
056 33 X²
057 44 SUM
058 08 08
059 43 RCL
060 09 09
061 18 C'
062 42 STD
063 13 13
064 75 -
065 43 RCL
066 10 10
067 95 =
068 42 STD
069 19 19
070 33 X²
071 44 SUM
072 08 08

```

 $\Delta s_j/s_j$:

```

073 43 RCL
074 08 08
075 34 FX
076 44 SUM
077 27 27

```

 v_{ij} :

```

078 43 RCL
079 25 25
080 35 1/X
081 49 PRD
082 21 21
083 49 PRD
084 20 20
085 49 PRD
086 19 19

```

 v_j :

```

087 43 RCL
088 21 21
089 33 X²
090 85 +
091 43 RCL
092 20 20
093 33 X²
094 85 +
095 43 RCL
096 19 19
097 33 X²
098 95 =

```

```

099 34 FX
100 42 STD
101 28 28

```

 a_{ij} :

```

102 43 RCL
103 21 21
104 75 -
105 43 RCL
106 18 18
107 95 =
108 42 STD
109 24 24
110 43 RCL
111 20 20
112 75 -
113 43 RCL
114 17 17
115 95 =
116 42 STD
117 23 23
118 43 RCL
119 19 19
120 75 -
121 43 RCL
122 16 16
123 95 =
124 42 STD
125 22 22
126 43 RCL
127 25 25
128 35 1/X
129 49 PRD
130 24 24
131 49 PRD
132 23 23
133 49 PRD
134 22 22

```

 a_j :

```

135 43 RCL
136 24 24
137 33 X²
138 85 +
139 43 RCL
140 23 23
141 33 X²
142 85 +
143 43 RCL
144 22 22
145 33 X²
146 95 =
147 34 FX
148 42 STD
149 29 29

```

Alt/neu Verschiebung

```

150 43 RCL
151 15 15
152 42 STD
153 12 12
154 43 RCL
155 14 14
156 42 STD
157 11 11
158 43 RCL
159 13 13
160 42 STD
161 10 10
162 43 RCL
163 21 21
164 42 STD
165 18 18
166 43 RCL
167 20 20
168 42 STD
169 17 17
170 43 RCL
171 19 19
172 42 STD
173 16 16

```

Durchlaufabfrage für Korrektur

```

174 01 1
175 44 SUM
176 05 05
177 43 RCL
178 05 05
179 32 X:T
180 01 1
181 67 EQ
182 85 +
183 02 2
184 67 EQ
185 75 -
186 61 GTD
187 43 RCL

```

Korrektur zu den beiden ersten Durchläufen

```

188 76 LBL
189 85 +
190 00 0
191 42 STD
192 27 27
193 42 STD
194 28 28
195 76 LBL
196 75 -
197 00 0
198 42 STD
199 29 29
200 61 GTD
201 43 RCL

```

3.2.2 Anwendungsbeispiele

– 1 –

Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Schraubenlinie mit

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos \varphi \\y &= 2 \sin \varphi \\z &= 2 \varphi\end{aligned}$$

Und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi(t) = 2t + \varphi_0$$

mit φ in grd und t in Sekunden. Zur Anfangszeit $t_0 = 0$ befindet sich der Massenpunkt an der Stelle $\varphi_0 = 45^\circ$.

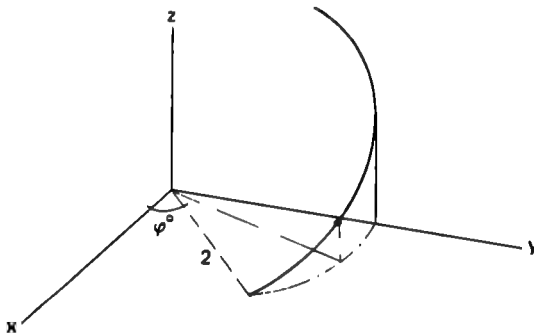


Bild 3.8
Schraubenlinie

Bild 3.8 zeigt den Verlauf der Bewegung. Die Unterprogramme für dieses Problem zeigt Tabelle 3.3.

Tabelle 3.3

Unterprogramme zu – 1 –

$f_1(\varphi)$:											
268	76	LBL	284	54)	299	53	(248	43	RCL
269	16	R ⁺	285	92	RTN	300	24	CE	249	14	14
270	53	(301	65	x	250	99	PRT
271	24	CE	$f_3(\varphi)$:			302	02	2	251	43	RCL
272	39	COS	286	76	LBL	303	85	+	252	13	13
273	65	x	287	18	C ⁺	304	04	4	253	99	PRT
274	02	2	288	53	(305	05	5	254	43	RCL
275	54)	289	24	CE	306	54)	255	09	09
276	92	RTN	290	65	x	307	92	RTN	256	99	PRT
			291	89	π				257	43	RCL
$f_2(\varphi)$:			292	55	+	Ausgabe:			258	27	27
277	76	LBL	293	09	9	240	76	LBL	259	99	PRT
278	17	B ⁺	294	00	0	241	15	E	260	43	RCL
279	53	(295	54)	242	43	RCL	261	28	28
280	24	CE	296	92	RTN	243	26	26	262	99	PRT
281	38	SIN				244	99	PRT	263	43	RCL
282	65	x	$\varphi(t)$:			245	43	RCL	264	29	29
283	02	2	297	76	LBL	246	15	15	265	99	PRT
			298	19	D ⁺	247	99	PRT	266	98	ADV
									267	92	RTN

Das Programm lieferte damit folgende Werte:

Eingabe:	0.	-t ₀	2.	5.	8.
	1.	-Δt	1.312118058	1.147152873	.9696192405
Ausgabe:	0.	-t _j	1.50941916	1.638304089	1.749239414
	1.	-x _j = f _{1j}	1.710422667	1.919862177	2.129301687
	1.414213562	-v _j = f _{2j}	49.	55.	61.
	1.414213562	-z _j = f _{3j}	.1974564515	.4936411289	.7898258062
	1.570796327	-ϕ _j	.0987282258	.0987282258	.0987282258
	45.	-s _j	.0024366919	.0024366919	.0024366919
	0.	-v _j	3.	6.	9.
	0.	-a _j	1.258640782	1.08927807	.9079809995
	0.		1.554291923	1.677341136	1.782013048
	0.		1.780235837	1.989675347	2.199114858
	1.		51.	57.	63.
	1.36399672		.2961846773	.5923693546	.8885540319
	1.462707403		.0987282258	.0987282258	.0987282258
	1.640609497		.0024366919	.0024366919	.0024366919
	47.				
	.0987282258				
	.0987282258				
	0.		4.	7.	10.
			1.203630046	1.03007615	.8452365235
			1.59727102	1.714334601	1.812615574
			1.850049007	2.059488517	2.268928028
			53.	59.	65.
			.3949129031	.6910975804	.9872822577
			.0987282258	.0987282258	.0987282258
			.0024366919	.0024366919	.0024366919

Da die Bewegungsverhältnisse leicht überschaubar sind, soll uns deren graphische Darstellung auch nicht weiter interessieren.

- 2 -

Über die Bewegung eines Massenpunktes sind folgende Werte gemessen worden: (in m)

t	x	y	z
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.125	0.062	0.020
0.2	0.215	0.180	0.111
0.3	0.430	0.192	0.204
0.4	0.522	0.201	0.312
0.5	0.533	0.240	0.421
0.6	0.514	0.251	0.532
0.7	0.481	0.273	0.640
0.8	0.372	0.292	0.753
0.9	0.370	0.304	0.802
1.0	0.368	0.321	0.882

Zu diesem Problem sehen unsere Unterprogramme wie folgt aus:

Tabelle 3.4

Unterprogramme zu – 2 –

$f_1(u)$:	$f_3(u)$:	Ausgabe:	
268 76 LBL	282 76 LBL	240 76 LBL	254 43 RCL
269 16 R'	283 18 C'	241 15 E	255 09 09
270 01 1	284 03 3	242 43 RCL	256 99 PRT
271 95 =	285 95 =	243 26 26	257 43 RCL
272 91 R/S	286 91 R/S	244 99 PRT	258 27 27
273 99 PRT	287 99 PRT	245 43 RCL	259 99 PRT
274 92 RTN	288 98 ADV	246 15 15	260 43 RCL
	289 92 RTN	247 99 PRT	261 28 28
		248 43 RCL	262 99 PRT
$f_2(u)$:	$u = t$:	249 14 14	263 43 RCL
275 76 LBL	290 76 LBL	250 99 PRT	264 29 29
276 17 B'	291 19 D'	251 43 RCL	265 99 PRT
277 02 2	292 92 RTN	252 13 13	266 98 ADV
278 95 =		253 99 PRT	267 92 RTN
279 91 R/S			
280 99 PRT			
281 92 RTN			

Tritt, wie in diesem Fall, die Zeit in den Funktionen als Parameter auf, ist SBR D' ein „blindes“ Unterprogramm. Es muß aber auf jeden Fall existieren. Die Daten werden in dem jeweiligen Unterprogramm aufgerufen (A', B' und C'). Die Werte ergeben:

Grundeingaben:	0. - t_0 0. 1 - Δt	Dateneingabe im Unterprogramm:	0. - x_j 0. - y_j 0. - z_j	Ausgabe:	0. - t_j 0. - x_j 0. - y_j 0. - z_j 0. - $u_j = t_j$ 0. - a_j 0. - v_j 0. - a_j
	0. 125	0. 43	0. 533	0. 481	0. 37
	0. 062	0. 192	0. 24	0. 273	0. 304
	0. 02	0. 204	0. 421	0. 64	0. 802
	0. 1	0. 3	0. 5	0. 7	0. 9
	0. 125	0. 43	0. 533	0. 481	0. 37
	0. 062	0. 192	0. 24	0. 273	0. 304
	0. 02	0. 204	0. 421	0. 64	0. 802
	0. 1	0. 3	0. 5	0. 7	0. 9
. 1409574404	. 5495999148	. 8080467117	1. 036249216	1. 244885503	
1. 409574404	2. 34559161	1. 162884345	1. 150521621	. 5048762225	
0.	16. 39054606	8. 638286867	1. 805547009	12. 48759384	
	0. 215	0. 522	0. 514	0. 372	0. 368
	0. 18	0. 201	0. 251	0. 292	0. 321
	0. 111	0. 312	0. 532	0. 753	0. 882
	0. 2	0. 4	0. 6	0. 8	1.
	0. 215	0. 522	0. 514	0. 372	0. 368
	0. 18	0. 201	0. 251	0. 292	0. 321
	0. 111	0. 312	0. 532	0. 753	0. 882
	0. 2	0. 4	0. 6	0. 8	1.
. 3150407538	. 6917582772	. 9211970541	1. 19439788	1. 32669626	
1. 740833134	1. 421583624	1. 131503425	1. 581486642	. 8181075724	
9. 696391081	12. 39475696	4. 108527717	7. 6223356	3. 140063694	

Die graphische Auswertung ergab das in Bild 3.9 dargestellte s-t-Diagramm, das in Bild 3.10 dargestellte v-t-Diagramm und das in Bild 3.11 dargestellte a-t-Diagramm.

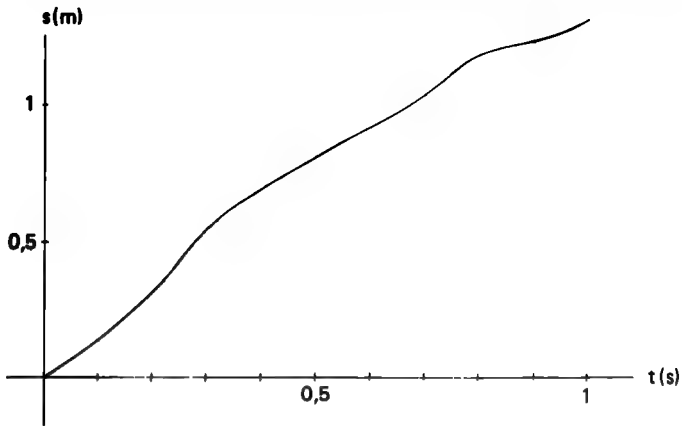


Bild 3.9
s-t-Diagramm

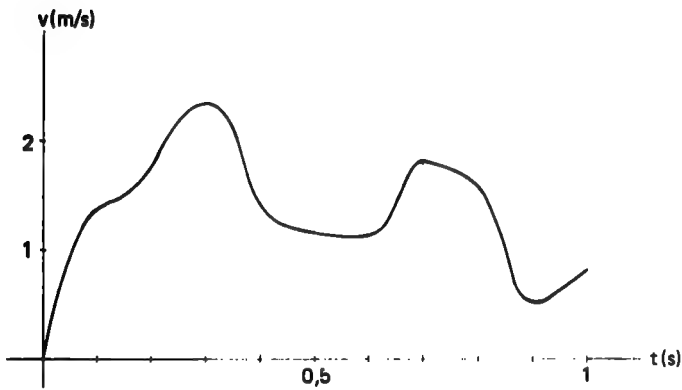


Bild 3.10
v-t-Diagramm

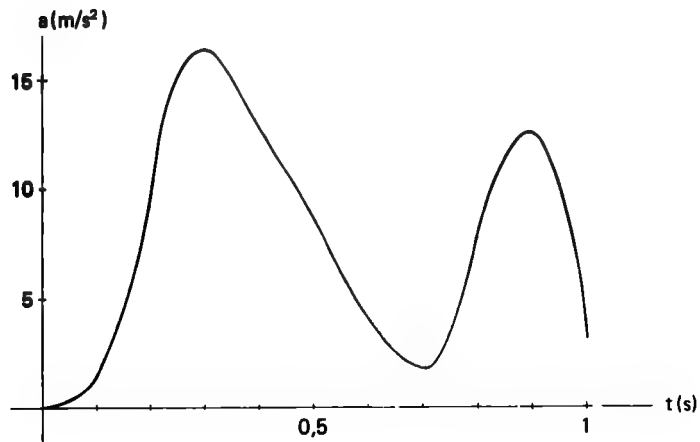


Bild 3.11
a-t-Diagramm

4 Kinetik

Die Kinetik befaßt sich, wie bereits einleitend erwähnt, mit den Bewegungsänderungen, die ein System unter Einwirkung von Kräften erfährt. Dies wird zunächst am Massenpunkt und dann am starren Körper betrachtet.

4.1 Kinetik des Massenpunktes

Unter einem Massenpunkt versteht man einen mathematischen Punkt, in dem man sich idealisiert die Masse eines Körpers vereinigt denkt. Er besitzt mithin eine endliche Masse aber kein Volumen. Dies läßt sich bei den Ansätzen jedoch nicht immer ganz verwirklichen.







4.1.1 Freie Bewegungen eines Massenpunktes im widerstehenden Mittel

Die Bewegungskurve eines freien Massenpunktes unter Schwerkrafteinfluß ist als schiefer Wurf bekannt. Betrachtet man einen schiefen Wurf im luftgefüllten Raum, wirkt der Bewegung des Massenpunktes, zu jedem Zeitpunkt seiner Bahn, eine Widerstandskraft entgegen. Nimmt man in erster Näherung an, daß die Widerstandskraft dem Quadrat der Geschwindigkeit direkt proportional ist, gehen Ansichtsfläche A und Luftdichte (Mediumdichte) δ in die Gleichung mit ein, so erhält man

$$F_w = \frac{1}{2} c_w \delta v^2 A. \quad (4.1.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor, die Konstante c_w wird als Widerstandsbeiwert bezeichnet. Er richtet sich nach der Form des Massenpunktes und wird experimentell bestimmt. So ganz von Dimensionslosigkeit des Massenpunktes können wir hier also nicht sprechen. Einige der häufigsten Widerstandsbeiwerte gibt Tabelle 4.1 wieder.

Tabelle 4.1 Widerstandsbeiwerte

Form	c_w	Form	c_w
	1.1		0.2–0.4
	1.3–1.6		0.055
	0.35		ca. 0.5

Zu jedem Zeitpunkt seiner Bahn, ist der Massenpunkt damit den in Bild 4.1 dargestellten Kräften ausgesetzt. Da der Luftwiderstand stets der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist, ergibt sich für die einzelnen Komponenten

$$F_{wx} = -\frac{1}{2} c_w \delta A v^2 \cos \alpha \quad (4.1.2)$$

$$= -\frac{1}{2} c_w \delta A v_x v \quad (4.1.3)$$

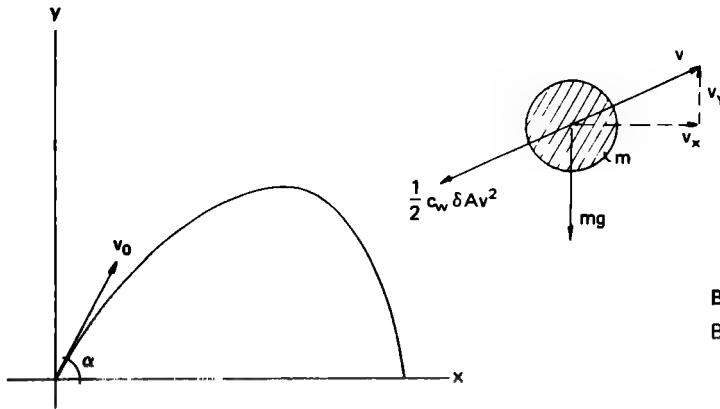


Bild 4.1
Ballistische Kurve

$$F_{wx} = -\frac{1}{2} c_w \delta A v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.1.4)$$

und

$$F_{wy} = -\frac{1}{2} c_w \delta A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (4.1.5)$$

Für den Bewegungsansatz wird damit

$$m a_x = -\frac{1}{2} c_w \delta A v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.1.6)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} c_w \delta A v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.1.7)$$

$$dv_x = -\frac{c_w \delta A}{2m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt \quad (4.1.8)$$

und ebenfalls

$$m a_y = -\frac{1}{2} c_w \delta A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - m g \quad (4.1.9)$$

$$dv_y = -\left(\frac{c_w \delta A}{2m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + g \right) dt. \quad (4.1.10)$$

Wir erhalten zwei gekoppelte Differentialgleichungen, (4.1.6) und (4.1.9), deren analytische Lösungen nur schwer zu integrieren sind.

Nach der Euler-Cauchy-Methode gilt näherungsweise für die allgemeine Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, t) \quad (4.1.11)$$

die numerische Darstellung

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, t). \quad (4.1.12)$$

$$\Delta v_x = - \left(\frac{c_w \delta A}{2m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) \Delta t \quad (4.1.13)$$

und

$$\Delta v_y = - \left(\frac{c_w \delta A}{2m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + g \right) \Delta t. \quad (4.1.14)$$

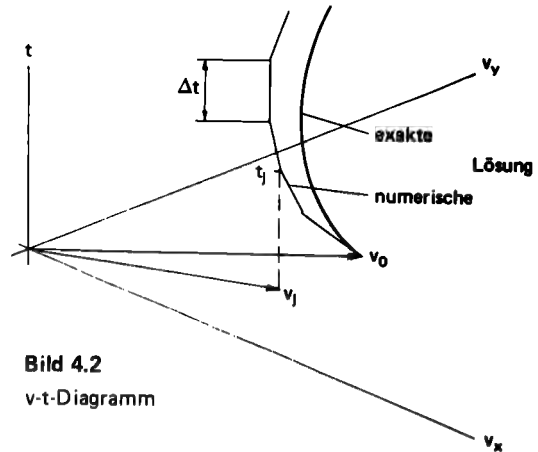


Bild 4.2
v-t-Diagramm

Unter Betrachtung der funktionalen Verhältnisse nach Bild 4.2 folgt, daß wir uns mit fortschreitender Berechnung immer mehr von der exakten Berechnung in zwei Richtungen entfernen. Die Gleichungen (4.1.13) und (4.1.14) sind die Grundgleichungen des in Bild 4.3 folgenden Berechnungsprozesses. Es folgen die Tabellen 4.2 und 4.3 mit Speicherbelegung und Rechnerprogramm.

Um nicht noch einen Wert im Programm eingeben zu müssen, wird das Programm einfach durch R/S abgebrochen, wenn die benötigten Daten errechnet sind.

Außer in der Hinsicht, daß Luftströmungen, Erdrotation und Luftdichteschwankungen unberücksichtigt bleiben, ist unser Berechnungsprozeß unter Auslassung eines weiteren Parameters idealisiert. Der Auftriebskraft durch das, den Massenpunkt umgebende, Medium. Solange sich die Bewegung in Luft vollzieht, ist die Auftriebskraft vernachlässigbar klein. Im Wasser z. B., muß sie jedoch Beachtung finden. Da sie der Gewichtskraft der vom Massenpunkt verdrängten Mediummenge entspricht und stets der Gewichtskraft des Massenpunktes entgegen wirkt, ergibt sich unter Betrachtung von Bild 4.4 nur eine Beeinflussung der vertikalen Komponente

$$m a_y = -\frac{1}{2} c_w \delta_m A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - m g - F_a. \quad (4.1.15)$$

Die darin enthaltene Auftriebskraft F_a ist

$$\mathbf{F}_m = V_k \delta_m \mathbf{g}. \quad (4.1.16)$$

Der Index k steht für Körper, m für Medium. Das Körpervolumen des Massenpunktes ergibt sich aus

$$V_k = \frac{m_k}{\delta_k}. \quad (4.1.17)$$

Tabelle 4.2 Speicherplatzbelegung

00 $\delta A_{c_w}/2m$	04 c_w	08 v_{xi}	12 t_i	16 $\Delta t_{vorh.}$
01 m	05 Δt	09 v_{yi}	13 Δv_{xi}	17 g
02 A	06 v_i	10 x_i	14 Δv_{yi}	18 $\sqrt{v_{xi}^2 + v_{yi}^2}$
03 δ	07 α_i	11 y_i	15 Δt_{prt}	19

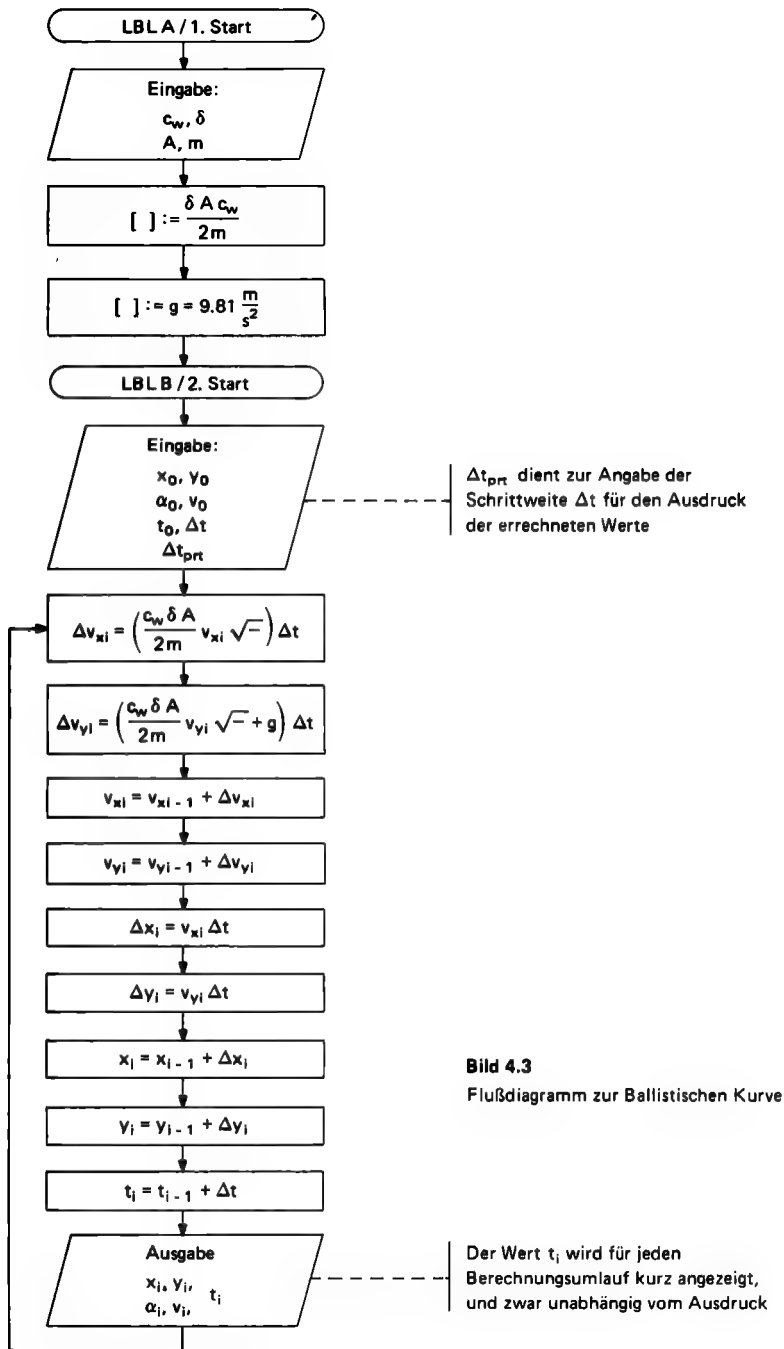


Bild 4.3
Flußdiagramm zur Ballistischen Kurve

Tabelle 4.3
Programm Ballistische Kurve
1. Start

```

000 76 LBL
001 11 R
002 47 CMS
003 04 4
004 42 STD
005 00 00
006 91 R/S
007 99 PRT
008 72 ST+
009 00 00
010 97 DSZ
011 00 00
012 00 00
013 06 06
014 98 ADV
015 43 RCL
016 04 04
017 65 X
018 43 RCL
019 03 03
020 65 X
021 43 RCL
022 02 02
023 55 +
024 02 2
025 55 -
026 43 RCL
027 01 01
028 95 =
029 42 STD
030 00 00
031 09 9
032 93 .
033 08 8
034 01 1
035 42 STD
036 17 17

```

2. Start

```

037 76 LBL
038 12 B
039 91 R/S
040 99 PRT
041 42 STD
042 05 05
043 91 R/S
044 99 PRT
045 42 STD
046 06 06
047 32 X!T
048 91 R/S
049 99 PRT
050 42 STD

```

```

051 07 07
052 37 P/R
053 42 STD
054 09 09
055 32 X!T
056 42 STD
057 08 08
058 91 R/S
059 99 PRT
060 42 STD
061 10 10
062 91 R/S
063 99 PRT
064 42 STD
065 11 11
066 91 R/S
067 99 PRT
068 42 STD
069 12 12
070 91 R/S
071 99 PRT
072 42 STD
073 15 15

```

Berechnung:

```

 $\sqrt{v_{xi}^2 + v_{yi}^2}$ 
074 76 LBL
075 43 RCL
076 43 RCL
077 08 08
078 33 X²
079 85 +
080 43 RCL
081 09 09
082 33 X²
083 95 =
084 34  $\Gamma$ X
085 42 STD
086 18 18

```

 $\Delta v_{xi}, v_{xi}$

```

087 43 RCL
088 00 00
089 65 X
090 43 RCL
091 08 08
092 65 X
093 43 RCL
094 18 18
095 65 X
096 43 RCL
097 05 05

```

```

098 94 +/-
099 95 =
100 42 STD
101 13 13
102 44 SUM
103 08 08

```

 $\Delta v_{yi}, v_{yi}$

```

104 43 RCL
105 00 00
106 65 X
107 43 RCL
108 09 09
109 65 X
110 43 RCL
111 18 18
112 85 +
113 43 RCL
114 17 17
115 95 =
116 65 X
117 43 RCL
118 05 05
119 94 +/-
120 95 =
121 42 STD
122 14 14
123 44 SUM
124 09 09

```

 α_i, v_i

```

125 43 RCL
126 08 08
127 32 X!T
128 43 RCL
129 09 09
130 22 INV
131 37 P/R
132 42 STD
133 07 07
134 32 X!T
135 42 STD
136 06 06

```

 $\Delta x_i, x_i$

```

137 43 RCL
138 08 08
139 65 X
140 43 RCL
141 05 05
142 95 =
143 44 SUM
144 10 10

```

 $\Delta y_i, y_i$

```

145 43 RCL
146 09 09
147 65 X
148 43 RCL
149 05 05
150 95 =
151 44 SUM
152 11 11

```

 t_i

```

153 43 RCL
154 05 05
155 44 SUM
156 12 12
157 44 SUM
158 16 16

```

Abfrage auf Ausdruck

```

159 43 RCL
160 15 15
161 32 X!T
162 43 RCL
163 16 16
164 66 PAU
165 22 INV
166 77 GE
167 43 RCL

```

Ausdruck

```

168 98 ADV
169 43 RCL
170 10 10
171 99 PRT
172 43 RCL
173 11 11
174 99 PRT
175 43 RCL
176 07 07
177 99 PRT
178 43 RCL
179 06 06
180 99 PRT
181 43 RCL
182 12 12
183 99 PRT
184 00 0
185 42 STD
186 16 16
187 61 GTD
188 43 RCL

```


Damit ergibt sich in (4.1.15) eingesetzt

$$m a_y = -\frac{1}{2} c_w \delta_m A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + m g - m \frac{\delta_m}{\delta_k} g \quad (4.1.18)$$

$$= -\frac{1}{2} c_w \delta_m A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + m g \left(1 - \frac{\delta_m}{\delta_k} \right). \quad (4.1.19)$$

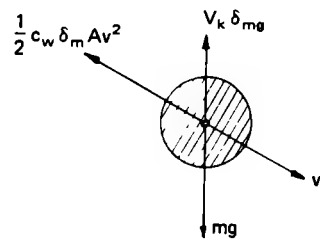


Bild 4.4 Sinkender Massenpunkt

Unter Definition einer reduzierten Erdbeschleunigung

$$g' = g \left(1 - \frac{\delta_m}{\delta_k} \right) \quad (4.1.20)$$

erhalten wir

$$m a_y = -\frac{1}{2} c_w \delta_m A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - m g' \quad (4.1.21)$$

wiederum die alte Gleichung (4.1.9). Damit kann das zuvor aufgestellte Programm auch für diese Fälle Anwendung finden.

Nach Eingabe der Grundwerte c_w , δ , A und m durch Programmteil A, erscheint in der Anzeige 9.81 und weist damit darauf hin, das die Erdbeschleunigung im Speicher 17 abgelegt wurde. Sie kann nun mit

$$g' \text{ STO } 17$$

korrigiert werden. Sie können sich auch noch ein zusätzliches Hilfsprogramm schreiben, das g' bestimmt und in Speicher 17 ablegt.

4.1.2 Das mathematische Pendel als erzwungene Bewegung

Unter einem mathematischen Pendel versteht man die idealisierte Aufhängung eines Massenpunktes an einem gewichtslosen und unelastischen Faden (Fadenpendel). Durch Auslenkung aus seiner stabilen Gleichgewichtslage vollführt das Pendel unter Vernachlässigung von Luftwiderstand, etc. eine schwingende Bewegung um diese Ruhelage. Nach den Ausführungen unter 3.2 der Kinematik hatten wir für die Bewegung eines Massenpunktes auf gekrümmter Bahn eine Tangential- und Normalbeschleunigung gefunden. In unserem Fall ergeben sie sich aus dem Ansatz

$$m a_t = - m g \sin \varphi \quad (4.1.22)$$

und

$$m a_n = S - m g \cos \varphi. \quad (4.1.23)$$

Für eine Kreisbewegung ergibt sich die Tangential- und Normalbeschleunigung aus

$$a_t = l \dot{\omega} \quad (4.1.24)$$

und

$$a_n = l \dot{\omega}^2. \quad (4.1.25)$$

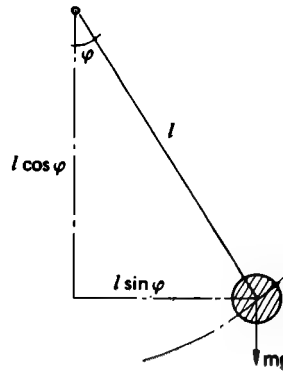
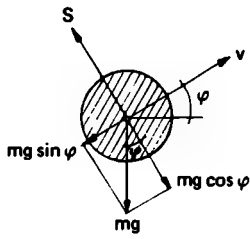


Bild 4.5
Mathematisches Pendel

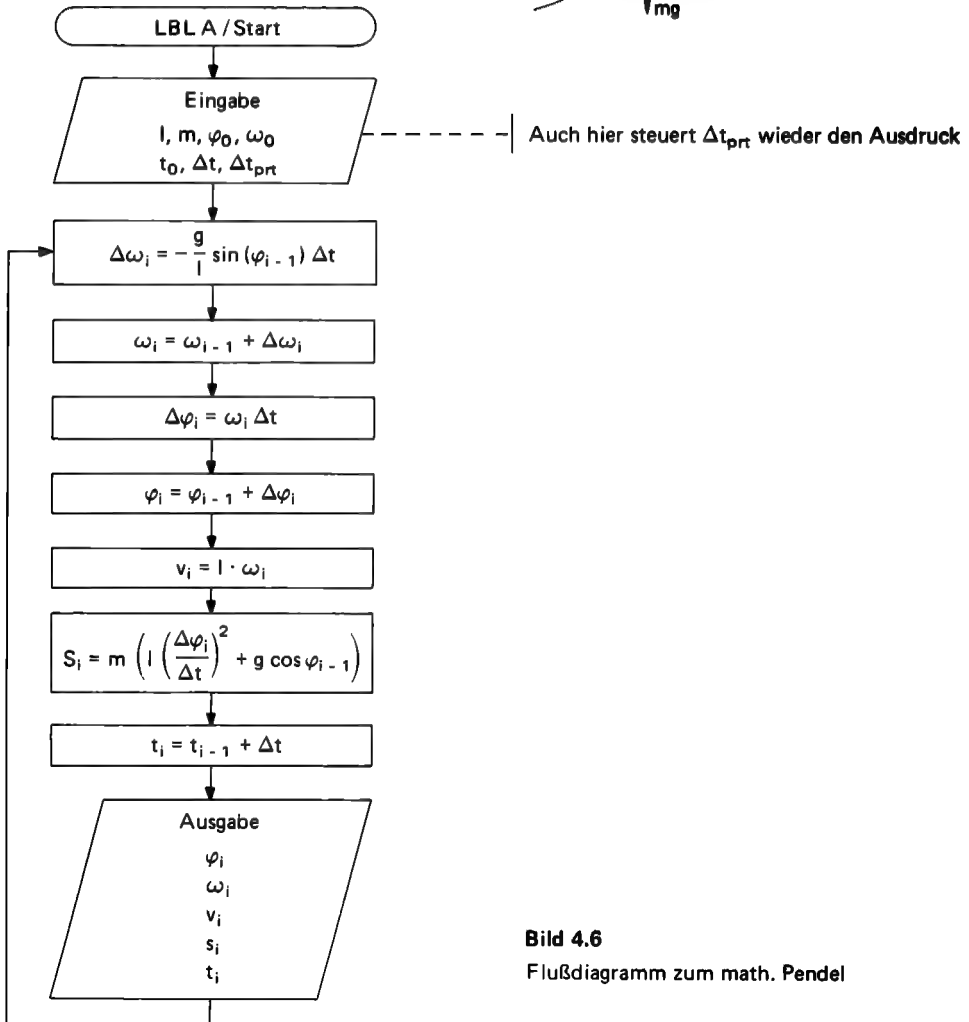


Bild 4.6
Flußdiagramm zum math. Pendel

Mithin erhalten wir eingesetzt

$$m l \dot{\omega} = -m g \sin \varphi \quad (4.1.26)$$

$$= -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (4.1.27)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (4.1.28)$$

und

$$m l \dot{\varphi}^2 = S - m g \cos \varphi \quad (4.1.29)$$

$$S = m (l \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \quad (4.1.30)$$

liefert die Seilkraft. Nach der bewährten Euler-Cauchy-Methode folgt

$$\Delta \omega = -\frac{g}{l} \sin(\varphi) \Delta t \quad (4.1.31)$$

$$S = m \left(l \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right)^2 + g \cos \varphi \right). \quad (4.1.32)$$

und damit der in Bild 4.6 dargestellte Berechnungsalgorithmus.

Tabelle 4.4 Speicherplatzbelegung

00 Zähler	03 t	06 l	09 $\Delta \varphi$
01 Δt_{prt}	04 ω	07 m	10 s
02 Δt	05 φ	08 g	11 $\Delta t_{\text{vorh.}}$

4.1.3 Gravitation und Planetenbewegung, als die Bewegung eines Massenpunktes unter Einfluß einer Zentralkraft

Aus den von Kepler gefundenen Gesetzen über die Planetenbewegungen leitete Newton ein Gesetz über die Kraftwirkung zwischen Sonne und Planet ab. Dies hat allgemeine Gültigkeit für die Wechselbeziehung beliebiger Massenpunkte und ist unter dem Begriff Gravitationsgesetz bekannt. Danach schreiben wir jedem Massenpunkt ein Gravitationsfeld zu, in dem dieser andere Massen anzieht.

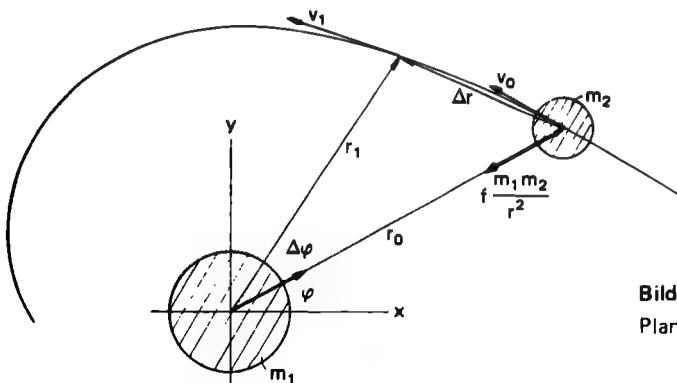


Bild 4.7
Planetenbewegung

Tabelle 4.5
Programm Mathematisches Pendel
Start/Eingabe

```

000 76 LBL
001 11 R
002 47 CMS
003 07 7
004 42 STD
005 00 00
006 91 R/S
007 99 PRT
008 72 ST*
009 00 00
010 97 DSZ
011 00 00
012 00 00
013 06 06
014 98 ADV
015 09 9
016 93 .
017 08 8
018 01 1
019 42 STD
020 08 08

```

Start/Berechnung
 $\Delta\omega_j, \omega_j$

```

021 76 LBL
022 43 RCL
023 43 RCL
024 08 08
025 94 +/-
026 55 +
027 43 RCL
028 06 06

```

```

029 65 x
030 43 RCL
031 05 05
032 38 SIN
033 65 x
034 43 RCL
035 02 02
036 95 =
037 44 SUM
038 04 04

```

 $\Delta\varphi_j, s_j$

```

039 43 RCL
040 04 04
041 65 x
042 43 RCL
043 02 02
044 95 =
045 55 +
046 32 X↑T
047 43 RCL
048 02 02
049 95 =
050 33 X²
051 65 x
052 43 RCL
053 06 06
054 85 +
055 43 RCL
056 08 08
057 65 x
058 43 RCL

```

```

059 05 05
060 39 COS
061 95 =
062 65 x
063 43 RCL
064 07 07
065 95 =
066 42 STD
067 10 10
068 32 X↑T
069 65 x
070 01 1
071 08 8
072 00 0
073 55 +
074 89 π
075 95 =
076 44 SUM
077 05 05

```

 t_i

```

078 43 RCL
079 02 02
080 44 SUM
081 03 03
082 44 SUM
083 11 11

```

Abfrage/Ausdruck

```

084 43 RCL
085 01 01
086 32 X↑T

```

```

087 43 RCL
088 11 11
089 66 PRN
090 22 INV
091 77 GE
092 43 RCL

```

Ausdruck

```

093 98 ADV
094 43 RCL
095 05 05
096 99 PRT
097 43 RCL
098 04 04
099 99 PRT
100 65 x
101 43 RCL
102 06 06
103 95 =
104 99 PRT
105 43 RCL
106 10 10
107 99 PRT
108 43 RCL
109 03 03
110 99 PRT
111 00 0
112 42 STD
113 11 11
114 61 GTD
115 43 RCL

```

Wir wollen für unser Programm den umgekehrten Weg gehen und über ein Zweikörperproblem zu den Planetenbewegungen kommen. Nach dem Gravitationsgesetz herrscht zwischen den Massen m_1 und m_2 die Gravitationskraft

$$F = f m_1 m_2 \frac{1}{r^2}. \quad (4.1.33)$$

Die darin enthaltene Gravitationskonstante beträgt $f = 6.67E-11 \text{ km}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Nach dem d'Alembertschen Prinzip erhalten wir für den Massenpunkt m_2

$$F = f m_1 m_2 \frac{1}{r^2} = m_2 a. \quad (4.1.34)$$

Und daraus die infinitesimale Geschwindigkeitsänderung

$$dv = f m_1 \frac{1}{r^2} dt. \quad (4.1.35)$$

Nach altbewährtem Muster folgt

$$\Delta v = f m_1 \frac{1}{r^2} \Delta t. \quad (4.1.36)$$

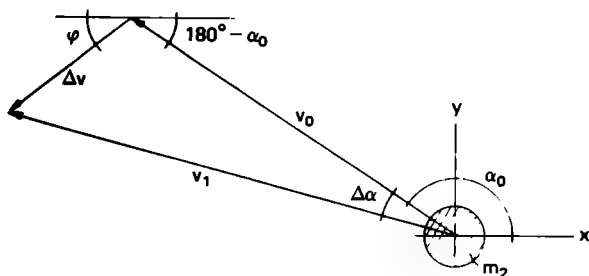


Bild 4.8
Geschwindigkeitsplan

Für die Geschwindigkeiten ergeben sich unter Betrachtung von Bild 4.8 und der Tatsache, daß es sich hier um ebene Bahnen handelt, die Beziehungen nach dem Cosinussatz

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \Delta v^2 - 2v_0 \Delta v \cos(\alpha - \varphi)}. \quad (4.1.37)$$

Nach dem Sinussatz folgt weiterhin

$$\Delta \alpha = \arcsin \left(\frac{\Delta v}{v_1} \sin(\alpha - \varphi) \right). \quad (4.1.38)$$

Durch erneute Anwendung des Cosinussatzes ergibt sich damit, nach Bild 4.7, auch die neue Entfernung

$$r_1 = \sqrt{r_0^2 + \Delta r^2 - 2r_0 \Delta r \cos(180 + \varphi - \alpha)}. \quad (4.1.39)$$

Und letztlich ergibt eine nochmalige Anwendung des Sinussatzes den in der Zeitdifferenz Δt überstrichenen Winkel

$$\Delta \varphi = \arcsin \left(\frac{\Delta r}{r_1} \sin(180 + \varphi - \alpha) \right). \quad (4.1.40)$$

Damit liegt unser Berechnungsalgorithmus in Bild 4.9 fest. Wie immer folgen Speicherplatzbelegung und Rechnerprogramm in Tabelle 4.6 und 4.7.

Eine Diskussion der Keplersetze erfolgt in Anwendungsbeispiel 4.1.5–5–.

Das Programm wird auch hier wieder aus Einfachheitsgründen, nach Beendigung der gewünschten Ausgaben, durch R/S gestoppt.

Dieses Programm läßt sich auch leicht zu einem Mehrkörperproblem umfunktionieren. Es müssen lediglich die Gravitationskräfte der Massen beachtet werden. Deren Komponenten bezüglich eines gewählten Koordinatensystems sind dann zu bestimmen, ähnlich dem Programm Raketenbewegung.

Tabelle 4.6 Speicherplatzbelegung

00 Zähler	04 v	08 m ₂	12 $\alpha - \varphi / 180 + \varphi - \alpha$
01 Δt_{prt}	05 α	09 m ₁	13 Δr
02 Δt	06 φ	10 f	14 $\Delta \alpha$
03 t	07 r	11 $\Delta v / F$	15 $\Delta t_{\text{vorh.}}$

Wird eine Masse tangential zur Erdkrümmung von der Erde abgeschossen, so ist die Startgeschwindigkeit für ihre Flugbahn grundlegend. Aus dem Energiesatz, unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes, ergeben sich die in Bild 4.10 dargestellten und nur für die Erde zutreffenden Grenzggeschwindigkeiten. Danach ist eine Mindestgeschwindigkeit von 7.9 km/s notwendig, um die Erde umrunden zu können. Man spricht von der ersten kosmischen Geschwindigkeit. Die zweite kosmische Geschwindigkeit von 11.2 km/s erlaubt das Verlassen des Gravitationsfeldes der Erde.

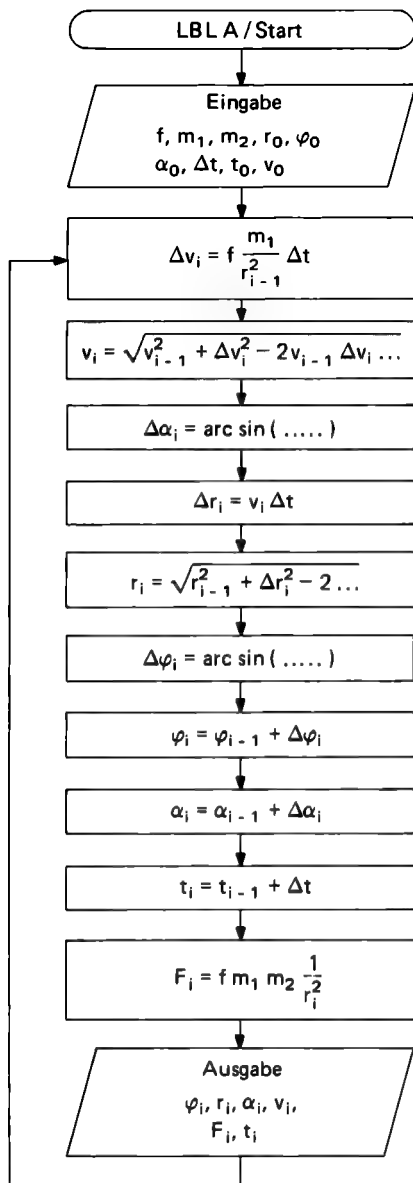


Bild 4.9
Flußdiagramm zur Planetenbewegung

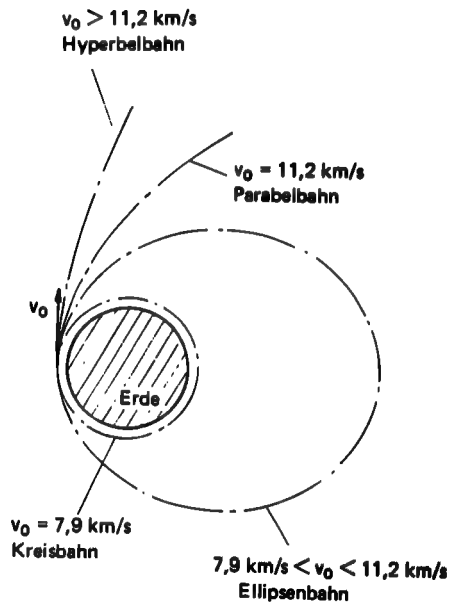


Bild 4.10
Flugbahnen tangential abgeschossener
Erdsatelliten

Tabelle 4.7

Programm Planetenbewegung

Start/Eingabe

```

000 76 LBL
001 11 A
002 47 CMS
003 01 1
004 00 0
005 42 STD
006 00 00
007 91 R/S
008 99 PRT
009 72 ST*
010 00 00
011 97 DSZ
012 00 00
013 00 00
014 06 06
015 98 ADV

```

Berechnung

```

 $\Delta v_i$ 
016 76 LBL
017 43 RCL
018 43 RCL
019 10 10
020 65 x
021 43 RCL
022 09 09
023 55 +
024 43 RCL
025 07 07
026 33  $X^2$ 
027 65 x
028 43 RCL
029 02 02
030 95 =
031 42 STD
032 11 11

```

 v_i

```

033 33  $X^2$ 
034 85 +
035 43 RCL
036 04 04
037 33  $X^2$ 
038 75 -
039 02 2
040 65 x
041 43 RCL
042 04 04
043 65 x
044 43 RCL
045 11 11
046 65 x
047 53 <

```

```

048 43 RCL
049 05 05
050 75 -
051 43 RCL
052 06 06
053 54 >
054 42 STD
055 12 12
056 39 CDS
057 95 =
058 34 FX
059 42 STD
060 04 04

```

 $\Delta \alpha_i, \alpha_i$

```

061 35 1/X
062 65 x
063 43 RCL
064 11 11
065 65 x
066 43 RCL
067 12 12
068 38 SIN
069 95 =
070 22 INV
071 38 SIN
072 42 STD
073 14 14

```

 Δr_i

```

074 43 RCL
075 04 04
076 65 x
077 43 RCL
078 02 02
079 95 =
080 42 STD
081 13 13

```

 r_i

```

082 33  $X^2$ 
083 85 +
084 43 RCL
085 07 07
086 33  $X^2$ 
087 75 -
088 02 2
089 65 x
090 43 RCL
091 07 07
092 65 x
093 43 RCL
094 13 13

```

```

095 65 x
096 53 <
097 01 1
098 08 8
099 00 0
100 85 +
101 43 RCL
102 06 06
103 75 -
104 43 RCL
105 05 05
106 54 >
107 42 STD
108 12 12
109 39 CDS
110 95 =
111 34 FX
112 42 STD
113 07 07

```

 $\Delta \phi_i, \phi_i$

```

114 35 1/X
115 65 x
116 43 RCL
117 13 13
118 65 x
119 43 RCL
120 12 12
121 38 SIN
122 95 =
123 95 =
124 22 INV
125 38 SIN
126 44 SUM
127 06 06

```

 α_i

```

128 43 RCL
129 14 14
130 44 SUM
131 05 05

```

 F_i

```

132 43 RCL
133 10 10
134 65 x
135 43 RCL
136 09 09
137 65 x
138 43 RCL
139 08 08
140 55 +
141 43 RCL

```

```

142 07 07
143 33  $X^2$ 
144 95 =
145 42 STD
146 11 11

```

 t_i

```

147 43 RCL
148 02 02
149 44 SUM
150 15 15
151 44 SUM
152 03 03

```

Abfrage/Ausdruck

```

153 43 RCL
154 01 01
155 32 X<T
156 43 RCL
157 15 15
158 66 PRN
159 22 INV
160 77 GE
161 43 RCL

```

Ausdruck

```

162 22 INV
163 52 EE
164 98 ADV
165 43 RCL
166 06 06
167 99 PRT
168 43 RCL
169 07 07
170 99 PRT
171 43 RCL
172 05 05
173 99 PRT
174 43 RCL
175 04 04
176 99 PRT
177 43 RCL
178 11 11
179 99 PRT
180 43 RCL
181 03 03
182 99 PRT
183 00 0
184 42 STD
185 15 15
186 61 GTO
187 43 RCL

```

4.1.4 Die Raketenbewegung, als die Bewegung eines Massenpunktes mit veränderlicher Masse

Die Raketenbewegung stellt das einzige uns bekannte Prinzip dar, die Beschleunigung eines Fahrzeuges, ohne zu Hilfenahme von Reibungskräften, durchzuführen. Daher funktioniert dieses Prinzip auch im kräftefreien Raum. Die erreichbare Raketengeschwindigkeit ergibt sich nach dem Impulssatz aus der Geschwindigkeit und der Anzahl der Masseteilchen austretender Verbrennungsgase. Die Rakete erhält unter Betrachtung von Bild 4.11 das Impulsdifferential

$$(m_1 + m_2) dv = -v_s dm. \quad (4.1.41)$$

Die Integration liefert

$$\int_{v_a}^{v_e} \frac{dv}{v_s} = - \int_{m_1+m_2}^{m_1} \frac{dm}{m_1+m_2} = \int_{m_1}^{m_1+m_2} \frac{dm}{m_1+m_2}, \quad (4.1.42)$$

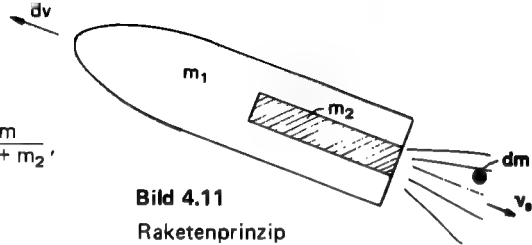


Bild 4.11
Raketenprinzip

mit dem Index e für End- und a für Anfangszustand. Unter der Voraussetzung konstanter Ausströmgeschwindigkeit v_s folgt

$$\frac{1}{v_s} |v|_{v_a}^{v_e} = |\ln(m)|_{m_1}^{m_1+m_2} \quad (4.1.43)$$

$$\frac{1}{v_s} (v_e - v_a) = \ln \frac{m_1 + m_2}{m_1} = \ln \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right). \quad (4.1.44)$$

Mit der Annahme, daß die Startgeschwindigkeit $v_a = 0$ ist, z. B. bei einem Start von der Erde auf einer Rampe, folgt

$$1 + \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{v_e}{v_s} \right). \quad (4.1.45)$$

Diese Formel ist für die Auslegung einer Rakete von großer Bedeutung. Bei Beachtung der konstruktiv vorliegenden Ausströmgeschwindigkeit und der Raketenendgeschwindigkeit, als Voraussetzung des Bahnverlaufs (siehe 4.1.3), ergibt sich unter Vernachlässigung von Strömungswiderständen der Nutzlast/Brennmasse-Quotient.

Die Bewegungsgleichung der Rakete erhalten wir nach Bild 4.12 unter Einfluß der Gravitationskraft zum Zentralkörper M und der Impulskraft des Antriebes aus

$$m a = \frac{dm}{dt} v_s + f M m \frac{1}{r^2}. \quad (4.1.46)$$

In Komponentenschreibweise heißt dies

$$m a_x = \frac{dm}{dt} v_s \cos \alpha + f M m \frac{1}{r^2} \cos (180 + \varphi) \quad (4.1.47)$$

und

$$m a_y = \frac{dm}{dt} v_s \sin \alpha + f M m \frac{1}{r^2} \sin (180 + \varphi). \quad (4.1.48)$$

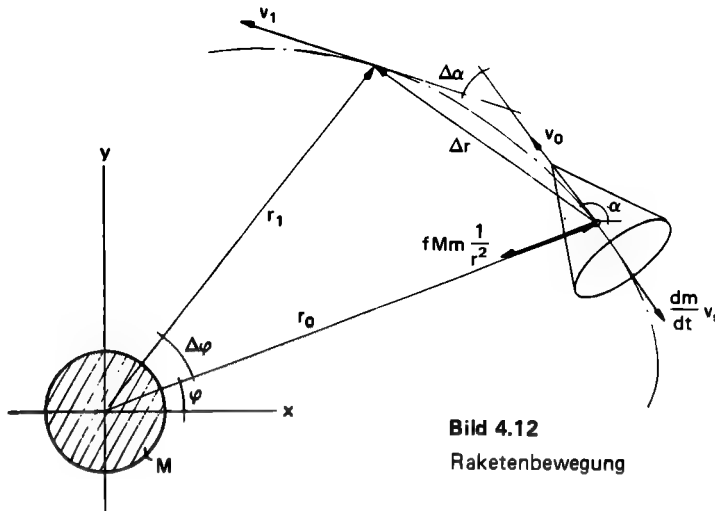


Bild 4.12
Raketenbewegung

Unter der Annahme, daß die Menge der in der Zeiteinheit dt erzeugten Verbrennungsgase konstant ist, also

$$\frac{dm}{dt} = u = \text{const.} \quad (4.1.49)$$

und damit für die Raketenmasse

$$m = m_0 - ut \quad (4.1.50)$$

gilt, folgt nach altem Prinzip

$$\Delta v_x = \left(\frac{u v_s \cos \alpha}{m_0 - ut} + f M \frac{\cos(180 + \varphi)}{r^2} \right) \Delta t \quad (4.1.51)$$

und

$$\Delta v_y = \left(\frac{u v_s \sin \alpha}{m_0 - ut} + f M \frac{\sin(180 + \varphi)}{r^2} \right) \Delta t. \quad (4.1.52)$$

Damit liegt unser Berechnungsprozeß wiederum fest und die Programmierung folgt wie in den vorangegangenen Ausführungen. In Bild 4.13 folgt das Flußdiagramm und in den Tabellen 4.8 und 4.9 Speicherplatzbelegung und Rechnerprogramm.

Tabelle 4.8 Speicherplatzbelegung

00 Δt_{vorh}	04 v	08 u	12 f	16 x
01 Δt_{prt}	05 α	09 v_s	13 v_y	17 F
02 Δt	06 r	10 m	14 v_x	18 Zwischen-
03 t	07 φ	11 M	15 y	19 werte

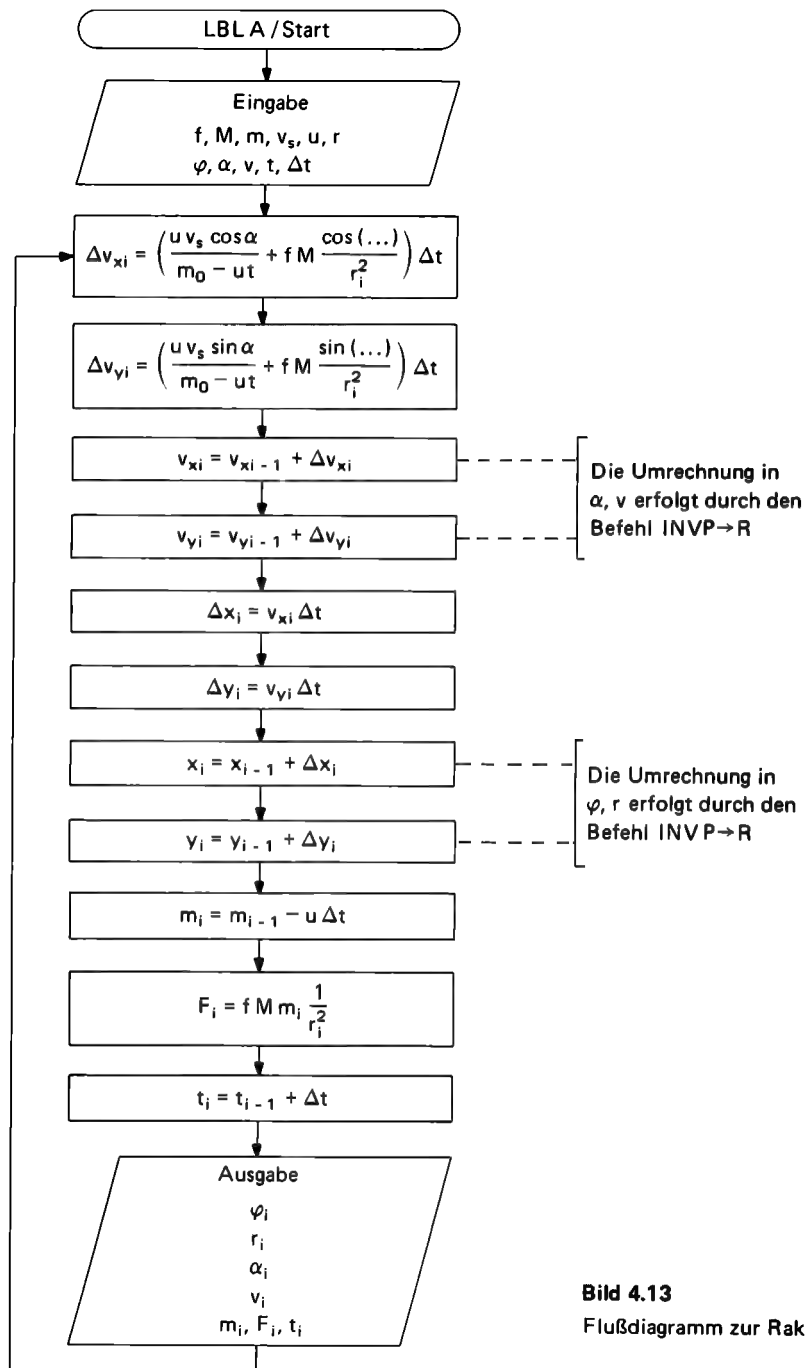


Bild 4.13

Flußdiagramm zur Raketenbewegung

Tabelle 4.9

Programm Raketenbewegung

Start/Eingabe

000 76 LBL
 001 11 R
 002 47 CMS
 003 01 1
 004 02 2
 005 42 STD
 006 00 00
 007 91 R/S
 008 99 PRT
 009 72 ST+
 010 00 00
 011 97 DSZ
 012 00 00
 013 00 00
 014 06 06
 015 98 ADV

Umrechnung

016 43 RCL
 017 06 06
 018 32 X:T
 019 43 RCL
 020 07 07
 021 37 P/R
 022 42 STD
 023 15 15
 024 32 X:T
 025 42 STD
 026 16 16
 027 43 RCL
 028 04 04
 029 32 X:T
 030 43 RCL
 031 05 05
 032 37 P/R
 033 42 STD
 034 13 13
 035 32 X:T
 036 42 STD
 037 14 14

Berechnung

 $\Delta v_{xi}, v_{xi}$

038 76 LBL
 039 43 RCL
 040 43 RCL
 041 08 08
 042 65 x
 043 43 RCL
 044 09 09
 045 55 +
 046 43 RCL
 047 10 10
 048 65 x
 049 42 STD
 050 19 19
 051 43 RCL
 052 05 05
 053 39 COS
 054 85 +

055 43 RCL
 056 12 12
 057 65 x
 058 43 RCL
 059 11 11
 060 55 +
 061 43 RCL
 062 06 06
 063 33 X²
 064 65 x
 065 42 STD
 066 18 18
 067 53 <
 068 01 1
 069 08 8
 070 00 0
 071 75 -
 072 43 RCL
 073 07 07
 074 54 >
 075 39 COS
 076 95 =
 077 65 x
 078 43 RCL
 079 02 02
 080 95 =
 081 44 SUM
 082 14 14

 $\Delta v_{yi}, v_{yi}$

083 43 RCL
 084 19 19
 085 65 x
 086 43 RCL
 087 05 05
 088 38 SIN
 089 85 +
 090 43 RCL
 091 18 18
 092 65 x
 093 53 <
 094 01 1
 095 08 8
 096 00 0
 097 85 +
 098 43 RCL
 099 07 07
 100 54 >
 101 38 SIN
 102 95 =
 103 65 x
 104 43 RCL
 105 02 02
 106 95 =
 107 44 SUM
 108 13 13

 $\Delta x_i, x_i$

109 43 RCL
 110 14 14

111 65 x
 112 43 RCL
 113 02 02
 114 95 =
 115 44 SUM
 116 16 16

 $\Delta y_i, y_i$

117 43 RCL
 118 13 13
 119 65 x
 120 43 RCL
 121 02 02
 122 95 =
 123 44 SUM
 124 15 15

 m_i

125 43 RCL
 126 08 08
 127 94 +/-
 128 65 x
 129 43 RCL
 130 02 02
 131 95 =
 132 44 SUM
 133 10 10

Umrechnung

134 43 RCL
 135 14 14
 136 32 X:T
 137 43 RCL
 138 13 13
 139 22 INV
 140 37 P/R
 141 42 STD
 142 05 05
 143 32 X:T
 144 42 STD
 145 04 04
 146 43 RCL
 147 16 16
 148 32 X:T
 149 43 RCL
 150 15 15
 151 22 INV
 152 37 P/R
 153 42 STD
 154 07 07
 155 32 X:T
 156 42 STD
 157 06 06

 F_i

158 43 RCL
 159 12 12
 160 65 x
 161 43 RCL
 162 11 11

163 65 x
 164 43 RCL
 165 10 10
 166 55 +
 167 43 RCL
 168 06 06
 169 33 X²
 170 95 =
 171 42 STD
 172 17 17

 t_i

173 43 RCL
 174 02 02
 175 44 SUM
 176 03 03
 177 44 SUM
 178 00 00

Abfrage/Ausdruck

179 43 RCL
 180 01 01
 181 32 X:T
 182 43 RCL
 183 00 00
 184 66 PRN
 185 22 INV
 186 77 GE
 187 43 RCL

Ausdruck

188 98 ADV
 189 43 RCL
 190 07 07
 191 99 PRT
 192 43 RCL
 193 06 06
 194 99 PRT
 195 43 RCL
 196 05 05
 197 99 PRT
 198 43 RCL
 199 04 04
 200 99 PRT
 201 43 RCL
 202 10 10
 203 99 PRT
 204 43 RCL
 205 17 17
 206 99 PRT
 207 43 RCL
 208 03 03
 209 99 PRT
 210 00 0
 211 42 STD
 212 00 00
 213 61 GTD
 214 43 RCL

4.1.5 Anwendungsbeispiele

– 1 –

Ein Ball wird unter den Anfangswinkeln $\alpha_0 = 30^\circ$ und $\alpha_0 = 60^\circ$ mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ m/s}$ fortgeworfen. Seine Ansichtsfläche ist $A = 0.01 \text{ m}^2$ und seine Masse $m = 3 \text{ kg}$. Sein Luftwiderstandskoeffizient wird mit 0.4 angenommen. Die Luftdichte beträgt 1.293 kg/m^3 .

A Eingabe:	0.4	c_w	6.921034104	17.27800566	27.60685384
	1.293	δ	3.191960487	5.029120069	3.334398783
	0.01	A	19.31879245	.5486105069	-18.38376324
	3.	m	18.31745404	17.23929312	18.11594929
			0.4	1.	1.6
B Eingabe:	0.01	Δt			
	20.	v_0	10.37653061	20.72408113	31.04341409
	30.	α_0	4.19738184	4.856166064	1.986341527
	0.	x_0	13.33337146	-5.954041558	-24.06195427
	0.	y_0	17.74822929	17.31643266	18.80935427
	0.	t_0	0.6	1.2	1.8
	0.2	Δt_{prt}			
			13.82883177	24.16704721	34.47660735
Ausgabe:			4.809644264	4.291136957	.2473903322
			7.031447309	-12.31255538	-29.28461915
	3.462337037	x	17.38478662	17.61249094	19.67179151
	1.792979786	y	0.8	1.4	2.
	24.89191924	α			
	19.07487719	v			
	0.2	t			
					37.90628321
					-1.881985082
					-34.02856163
					20.6812462
					2.2

Die Berechnung mit dem zweiten Wurfwinkel ergibt:

	0.4				
1.293	5.97120184	13.86260642	21.69530608	29.46821529	
0.01	8.552491371	14.38396098	13.91500311	7.197018771	
3.	48.75813407	19.03460925	-24.53965867	-51.65762897	
	15.03235819	10.39342043	10.72604544	15.58903846	
	0.6	1.4	2.2	3.	
0.01					
20.					
60.	7.950575069	15.82581641	23.64480534	31.39956536	
0.	10.60433112	14.85537886	12.81905048	4.549393918	
0.	43.30038583	8.257493189	-33.33871715	-55.72772996	
0.	13.58324307	9.91072307	11.65675148	17.12519042	
0.2	0.8	1.6	2.4	3.2	
1.996483776	9.925313716	17.78566408	25.59038431	33.32521974	
3.252216273	12.25938776	14.93390535	11.33328846	1.517744686	
56.92575273	36.63646513	-3.153411845	-40.68014884	-59.10554626	
18.26377072	12.29179898	9.80621736	12.81452442	18.72393803	
	1.	1.8	2.6	3.4	
3.986688411	11.89586597	19.74219018	27.53166498	35.24466655	
6.102371439	13.51891761	14.62021575	9.458834855	-1.895912267	
53.23310975	28.56923826	-14.34065788	-46.71329733	-61.93613172	
16.60154165	11.20813536	10.08902756	14.1406747	20.36683276	
	1.2	2.	2.8	3.6	

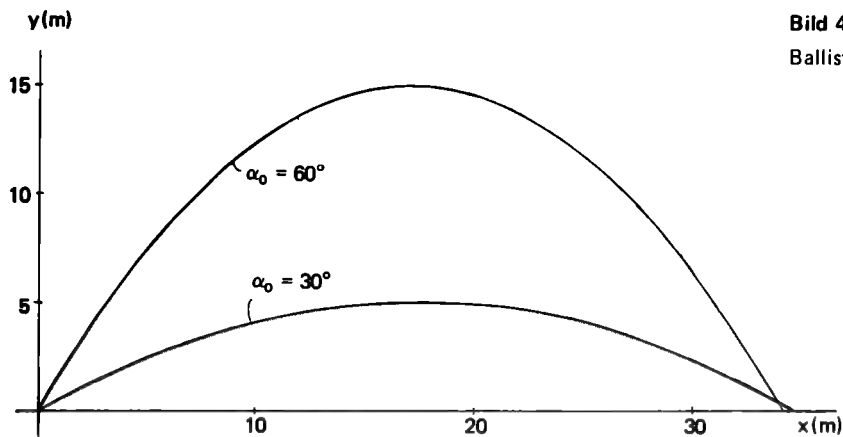


Bild 4.14
Ballistische Kurven

Bild 4.14 zeigt das Ergebnis der Berechnungen. Eine in der Ballistik als Steilschuß bezeichnete Kurve ($\alpha_0 = 60^\circ$) erreicht die gleiche Weite wie ein ‚Flachschuß‘ ($\alpha_0 = 30^\circ$). Der Einfluß des Luftwiderstandes ist hier gering sichtbar. Erst bei höheren Geschwindigkeiten weicht die Ballistische Kurve stärker von der Wurfparabel ab.

– 2 –

Ein Fallschirmspringer, $c_w = 1.5$, $A = 30 \text{ m}^2$, $m = 100 \text{ kg}$, fällt mit $v_0 = 0$ im luftgefüllten Raum von $\delta = 1.293 \text{ kg/m}^3$, aus 10000 m Höhe bei geöffnetem Fallschirm.

```
Eingabe:      1.5      cw
              1.293    δ
              30.      A
              100.     m

              0.01     Δt
              0.       v0
              0.       α0
              0.       x0
              10000.   y0
              0.       t0
              0.2      Δtprt

              0.       x
              9999.797616 y
              -90.     α
              1.895462617 v
              0.2      t
```

Natürlich wird dies kein vernünftiger Fallschirmspringer ausführen, denn er möchte ja nicht ‚stundenlang‘ obenbleiben. Bild 4.15 zeigt nämlich, daß die Sinkgeschwindigkeit sich einem Grenzwert nähert. Dieser läßt sich auch analytisch aus der Bedingung für den gleichmäßigen Fall

$$m g = \frac{1}{2} c_w \delta A v^2 \quad (4.1.53)$$

0. 9999.249186 -90. 3.432472025 0.4	0. 9988.398373 -90. 5.803785022 2.4	0. 9976.785471 -90. 5.806891903 4.4	0. 9965.171682 -90. 5.806895117 6.4
0. 9998.445358 -90. 4.473398698 0.6	0. 9987.237436 -90. 5.805330937 2.6	0. 9975.624093 -90. 5.806893502 4.6	0. 9964.010303 -90. 5.806895118 6.6
0. 9997.47967 -90. 5.094360592 0.8	0. 9986.076279 -90. 5.806108488 2.8	0. 9974.462714 -90. 5.806894307 4.8	0. 9962.848924 -90. 5.806895119 6.8
0. 9996.421303 -90. 5.436925093 1.	0. 9984.915012 -90. 5.806499535 3.	0. 9973.301335 -90. 5.806894711 5.	0. 9961.687545 -90. 5.80689512 7.
0. 9995.312979 -90. 5.617751637 1.2	0. 9983.753689 -90. 5.806696189 3.2	0. 9972.139956 -90. 5.806894914 5.2	0. 9960.526166 -90. 5.80689512 7.2
0. 9994.178608 -90. 5.71097758 1.4	0. 9982.592339 -90. 5.806795083 3.4	0. 9970.978577 -90. 5.806895017 5.4	0. 9959.364787 -90. 5.80689512 7.4
0. 9993.030896 -90. 5.758455494 1.6	0. 9981.430974 -90. 5.806844815 3.6	0. 9969.817198 -90. 5.806895068 5.6	
0. 9991.876411 -90. 5.782484016 1.8	0. 9980.269602 -90. 5.806869823 3.8	0. 9968.655819 -90. 5.806895094 5.8	
0. 9990.718504 -90. 5.794606274 2.	0. 9979.108227 -90. 5.806882399 4.	0. 9967.49444 -90. 5.806895107 6.	
0. 9989.558873 -90. 5.80071209 2.2	0. 9977.946849 -90. 5.806888723 4.2	0. 9966.333061 -90. 5.806895113 6.2	

berechnen, wurch

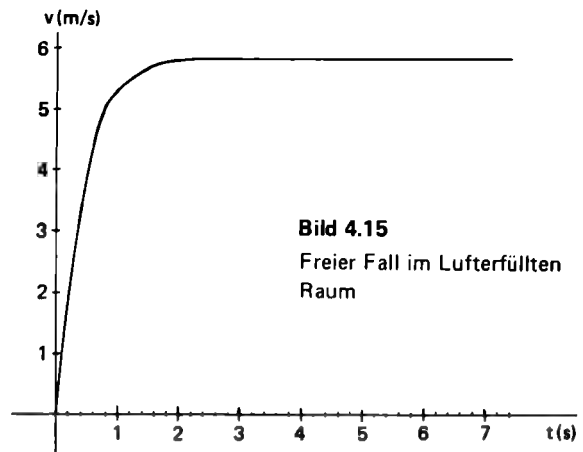
$$v_{\text{grenz}} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \delta A}} \quad (4.1.54)$$

In unserem Fall also

$$v_g = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{1.5 \cdot 1.293 \text{ kg/m}^3 \cdot 30 \text{ m}^2}}$$

$$v_g = 5.80689512 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Unsere Näherungsberechnung entspricht damit der Rechengenauigkeit.



— 3 —

Ein Taucher $c_w = 0.8$, $A = 0.2 \text{ m}^2$, $m = 100 \text{ kg}$, $\delta_k = 1500 \text{ kg/m}^3$ springt mit $v_0 = 1 \text{ m/s}$ ins Wasser von $\delta_m = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Entsprechend der Ausarbeitung beträgt die zu verändernde Erdbeschleunigung

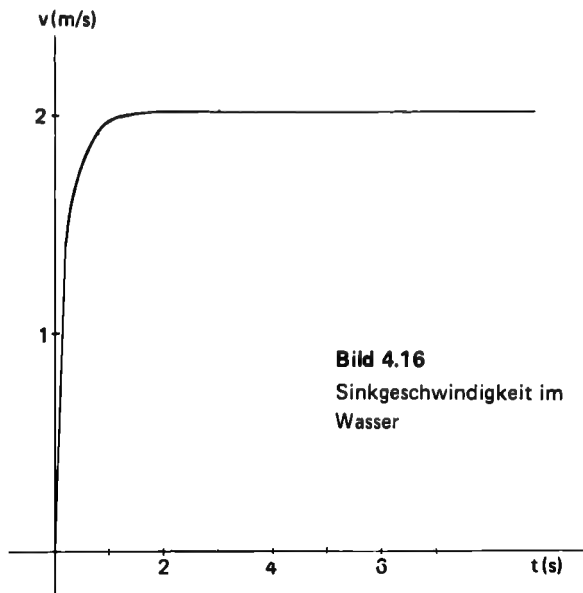
$$g' = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(1 - \frac{1000}{1500}\right) = 3.27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wie Bild 4.16 zeigt, gilt auch hier nach der Formel (4.1.54):

$$v_g = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 3.27 \text{ m/s}^2}{0.8 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.2 \text{ m}^2}}$$

$$v_g = 2.021756662 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Eine konstante Sinkgeschwindigkeit wird hier schneller erreicht.



Eingabe:	0.8	c_w	0.	0.	0.
	1000.	δ	-3.285604782	-7.328010014	-10.96717046
	0.2	A	-90.	-90.	-90.
	100.	m	2.018048987	2.021751494	2.021756648
			1.8	3.8	5.6
	0.01	Δt	0.	0.	0.
	1.	v_0	-3.689421468	-7.732360601	-11.37152179
	-90.	α_0	-90.	-90.	-90.
	0.	x_0	2.019834973	2.021753984	2.021756655
	0.	y_0	2.	4.	5.8
	0.	t_0			
Ausgabe:	0.2	Δt_{prt}			
			0.	0.	0.
	0.	x	-4.093495726	-8.136711547	-11.77587312
	-.2464647407	y	-90.	-90.	-90.
	-90.	α	2.020760869	2.021755275	2.021756658
	1.41680885	v	2.2	4.2	6.
	0.2	t			
			0.	0.	0.
	0.		-4.49770349	-8.54106268	-12.18022446
	-.5600193183		-90.	-90.	-90.
	-90.		2.021240715	2.021755943	2.02175666
	1.683230943		2.4	4.4	6.2
	0.4				
			0.	0.	0.
	0.		-4.901980439	-8.945413909	-12.58457579
	-.9144683281		-90.	-90.	-90.
	-90.		2.021489352	2.02175629	2.021756661
	1.838765406		2.6	4.6	6.4
	0.6				
			0.	0.	0.
	0.		-5.306293234	-9.349765187	-12.98892712
	-1.292121559		-90.	-90.	-90.
	-90.		2.021618174	2.021756469	2.021756661
	1.924772169		2.8	4.8	6.6
	0.8				
			0.	0.	0.
	0.		-5.710624601	-9.754116492	-13.39327845
	-1.68240262		-90.	-90.	-90.
	-90.		2.021684915	2.021756562	2.021756662
	1.970905455		3.	5.	6.8
	1.				
			0.	0.	0.
	0.		-6.11496559	-10.15846781	-13.79762978
	-2.079398742		-90.	-90.	-90.
	-90.		2.021719492	2.02175661	2.021756662
	1.995246516		3.2	5.2	7.
	1.2				
			0.	0.	0.
	0.		-6.519311563	-10.56281913	-14.20198112
	-2.479921661		-90.	-90.	-90.
	-90.		2.021737405	2.021756635	2.021756662
	2.007977737		3.4	5.4	7.2
	1.4				
			0.	0.	0.
	0.		-6.92366012		-14.60633245
	-2.882284778		-90.		-90.
	-90.		2.021746686		2.021756662
	2.014606169		3.6		7.4
	1.6				

Ein Fadenpendel (math. Pendel) mit einem 2 m langen Faden wird um $\varphi = 60^\circ$ ausgelenkt. Der Massenpunkt hat $m = 10 \text{ kg}$.

Eingabe:	10. m	-17.94950204	-42.75929885	53.10187358
	2. l	-2.111722529	1.49922489	1.012208585
	60. φ_0	-4.223445058	2.99844978	2.024417169
	0. ω_0	183.1303343	115.9731639	80.18104
	0. t_0	0.9	1.9	2.8
	0.01 Δt			
	0.1 Δt_{prt}	-29.48316851	-33.17628847	57.6411507
		-1.918559004	1.804824479	0.608882631
Ausgabe:		-3.837118008	3.609648957	1.217765262
	58.66436294 φ	159.9239933	146.2744446	60.42344959
	-.4230498093 ω	1.	2.	2.9
	-.8460996186 v			
	54.24144219 s			
	0.1 t	-39.64261924	-22.06474253	59.81232444
		-1.643313007	2.036887553	1.892799415
		-3.286626013	4.073775105	3.785598829
		130.56863	173.1239367	50.20496934
	54.9337676	1.1	2.1	3.
	-.8351873851			
	-1.67037477			
	69.63890194	-48.01852757	-9.905013345	59.55930305
	0.2	-1.305528258	2.17722541	-.2350724453
		-2.611056517	4.354450819	-.4701448906
		100.6526364	191.0536834	50.6082257
	48.9096734	1.2	2.2	3.1
	-1.223665369			
	-2.447330738			
	93.51364141	-54.31381727	2.734353449	56.88844895
	0.3	-.9243599266	2.213348176	-.6535036732
		-1.848719853	4.426696351	-1.307007346
		75.04907206	196.0460844	61.59238959
	40.77579918	1.3	2.3	3.2
	-1.572711235			
	-3.145422469			
	122.739927	-58.33340312	15.24072324	51.86971983
	0.4	-.5162982607	2.141847724	-1.054285415
		-1.032596521	4.283695449	-2.10857083
		57.26177161	186.9306353	81.98545951
	30.81587938	1.4	2.4	3.3
	-1.863632016			
	-3.727264033			
	152.7613874	-59.9666354	27.01392981	44.64796162
	0.5	-.0946978436	1.969392164	-1.423072765
		-.1893956872	3.938784329	-2.846145529
		49.35922116	165.8275312	109.3066976
	19.42538461	1.5	2.5	3.4
	-2.076683422			
	-4.153366843			
	178.0705392	-59.17181503	37.51922323	35.46026181
	0.6	-.3292664185	1.7108081	-1.742355467
		-.6585328371	3.421616201	-3.484710935
		52.16353406	137.3559054	139.616595
	7.107079577	1.6	2.6	3.5
	-2.194586747			
	-4.389173494			
	193.3807	-55.96899531	46.32243126	24.65163103
	0.7	-.7448512135	1.385245846	-1.992508809
		1.489702427	2.770491692	-3.985017619
		65.38981894	107.1022091	167.7281247
	-5.556180858	1.7	2.7	3.6
	-2.206647066			
	-4.413294131			
	195.2107304	-50.44354869		
	0.8	1.139854598		
		2.279709195		
		87.59302671		
		1.8		

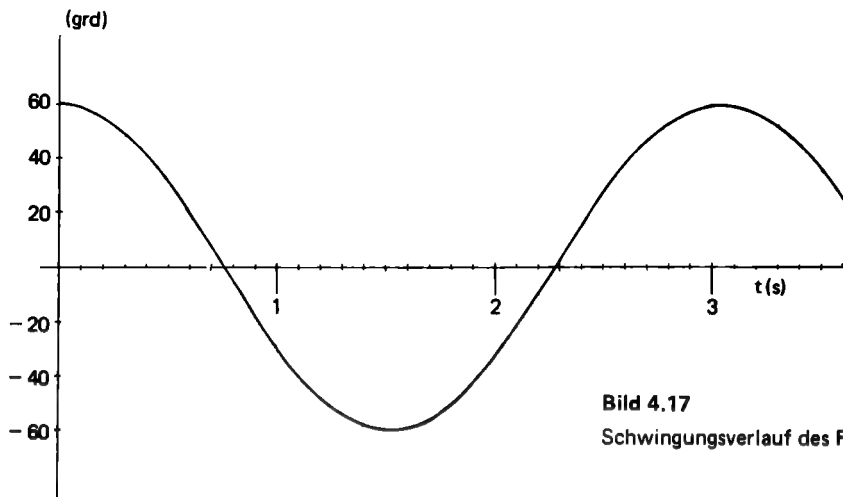


Bild 4.17
Schwingungsverlauf des Fadenpendels

Auch hier wollen wir eine Grenzwertbetrachtung anstellen. Aus der Energieumsetzung lässt sich analytisch die Geschwindigkeit des Massenpunktes im tiefsten Punkt seiner Bahn bestimmen. Nach Bild 4.18 wird das durch die Höhendifferenz h umgesetzte Energiepotential, durch die Gleichung

$$mgh = m \frac{v^2}{2} \quad (4.1.55)$$

beschrieben. Daraus folgt durch Umstellung

$$v_{\max} = \sqrt{2gh} \quad (4.1.56)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m}}{\text{s}^2}}$$

$$v_{\max} = 4.429446918 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

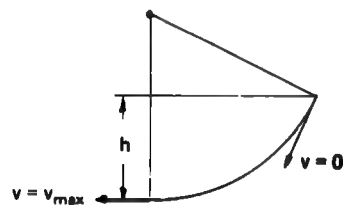


Bild 4.18 Energiebetrachtung

— 5 —

Ein Satellit von der Masse $m_2 = 1000 \text{ kg}$, soll auf einer elliptischen Bahn um die Erde ($m_1 = 5.973 \text{E}24 \text{ kg}$, $f = 6.67 \text{E}-20 \text{ km}^3/\text{kg s}^2$) gebracht werden. Dazu wird eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 10 \text{ km/s}$ gewählt. Der Satellit startet tangential ($\varphi_0 = 0^\circ$, $\alpha_0 = 90^\circ$) zum mittleren Erdradius von $r_0 = 6378 \text{ km}$.

Die graphische Darstellung der Satellitenbahn zeigt Bild 4.19. Daran lassen sich nun anschaulich die drei Keplerschen Gesetze erklären.

1. Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Dies heißt nichts anderes, als das die Strecken

$$\overline{1n2}, \quad \text{mit} \quad n = 3, 4, 5, 6, \dots,$$

in Bild 4.19 gleich lang sind.

Eingabe:	6. 67-20	f	147. 0427105	183. 4093266	223. 5353261
	5. 973 24	m ₁	20967. 4353	26480. 18507	18858. 14963
	1000.	m ₂	202. 6247471	277. 1462905	350. 1074978
	6378.	r ₀	3. 71997412	2. 437012037	4. 255867883
	0.	v ₀	0. 906207653	. 5681674067	1. 12026352
	90.	α ₀	5000.	11000.	17000.
	10.	v ₀			
	0.	t ₀			
	5.	Δt	154. 7080562	188. 7270759	235. 6768133
	1000.	Δt _{prt}	22849. 39732	26149. 62893	16065. 63391
			214. 0960879	290. 336993	362. 9791789
			3. 272606062	2. 514280512	5. 045613597
Ausgabe:			. 7630778542	. 5826225472	1. 543556801
			6000.	12000.	18000.
72. 20836605	φ				
8654. 871392	r				
136. 3367104	α	161. 32329	194. 2570781	253. 6368934	
8. 236058417	v	24314. 16703	25467. 87212	12744. 83276	
5. 318597327	F	225. 7620688	303. 0808843	378. 8366339	
1000.	t	2. 934456239	2. 671969586	6. 195604554	
		. 6739063629	. 6142328336	2. 452731827	
		7000.	13000.	19000.	
106. 4798458					
12387. 89231					
161. 4244459		167. 2793873	200. 1785284	285. 6716908	
6. 336350213		25392. 30121	24422. 4618	9066. 866319	
2. 596112488		237. 9079069	315. 255605	402. 4904312	
2000.		2. 687308172	2. 912159379	7. 987076256	
		. 6178943532	. 6679431045	4. 846228904	
		8000.	14000.	20000.	
125. 1863725					
15777. 33403					
177. 763171		172. 8293714	206. 7368638	352. 3621698	
5. 131882031		26104. 94282	22990. 39233	6589. 094663	
1. 600483157		250. 621239	326. 9346263	445. 2831373	
3000.		2. 52331535	3. 241957992	9. 86889194	
		. 5846189062	0. 750550304	9. 176284182	
		9000.	15000.	21000.	
137. 6497628					
18626. 80871					
190. 8273146		178. 1562859	214. 3078162	360. 9747661	
4. 314158428		26465. 39339	21151. 69235	6569. 217632	
1. 148263182		263. 7925383	338. 0869049	450. 6221098	
4000.		2. 440002519	3. 678223499	9. 893011223	
		. 5688026893	. 8904880719	9. 231899094	
		10000.	16000.	21100.	

2. Gesetz

Die Flächengeschwindigkeit eines Punktes ist konstant.

In unserem Fall heißt dies, die schraffierten Flächen A_1 und A_2 stimmen überein. Dies stimmt für jedes Flächenelement der Bahn, das in der gleichen Zeiteinheit überstrichen wird.

3. Gesetz

Das Verhältnis der dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnen zu den Quadraten der Umlaufzeiten ist konstant.

Das heißt allgemein

$$\frac{t_1^2}{b_1^3} = \frac{t_2^2}{b_2^3}.$$

Dies läßt sich jedoch nur an mehreren unterschiedlichen Bahnen zeigen.

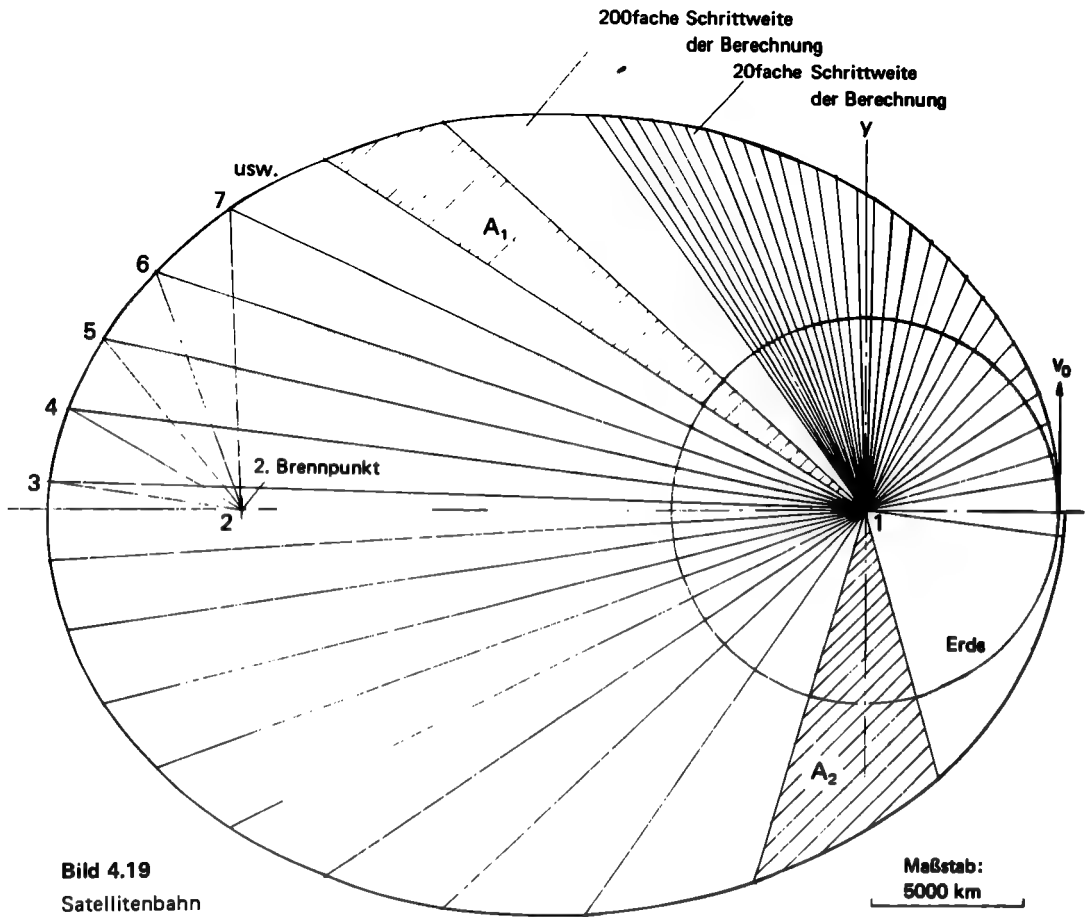


Bild 4.19
Satellitenbahn

(Ein Größenvergleich, die durchschnittliche Entfernung zum Mond beträgt 384 403 km.)

— 6 —

Eine Rakete soll eine Nutzlast von 50 kg auf eine elliptische Umlaufbahn um die Erde bringen ($M = 5.973E24$, $r_0 = 6378$ km, $f = 6.67E-20$ km³/kg s²). Eine Endgeschwindigkeit der Nutzlast von 10 km/s ist anzustreben (siehe 4.1.3). Die Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase beträgt 5 km/s = const. mit einer Massenausströmung von $u = 10$ kg/s = const. Aus Gleichung (4.1.45) läßt sich die Brennstoffmasse der Rakete abschätzen

$$\begin{aligned}
 m_2 &= m_1 \left(e^{\frac{v_e}{v_s}} - 1 \right) \\
 m_2 &= 50 \text{ kg} \left(e^{\frac{10}{5}} - 1 \right) \\
 m_2 &= 320 \text{ kg}
 \end{aligned}
 \tag{4.1.57}$$

Eingabe:		0.019371115	.1003766065	.2640181487	.5466367352
6.67-20	f	6379.293048	6384.029994	6393.000305	6408.04676
5.973 24	M	60.71503491	63.25205626	64.49584003	65.21677277
370.	m ₀	0.851703489	2.096990771	3.786696716	6.400253598
5.	v _s	310.	240.	170.	100.
10.	u	3.034833969	2.346063446	1.657134729	.9702128097
0.	v ₀	6.	13.	20.	27.
6378.	r ₀				
45.	a ₀	.0267440328	.1180951289	.2959020617	.6006301283
0.	v ₀	6379.748203	6385.024271	6394.713634	6410.903752
0.	t ₀	61.23852195	63.47842822	64.62328151	65.29198574
0.1	Δt	1.010632428	2.304938699	4.084673597	6.920141125
1.	Δt _{prt}	300.	230.	160.	90.
		2.936517051	2.247610642	1.558820576	.8724134341
		7.	14.	21.	28.
Ausgabe:					
.0005140349	φ	.0354277138	.1375518029	.3302927271	.6590690696
6378.042854	r	6380.273981	6386.106950	6396.554827	6413.995207
54.56888634	α	61.68673347	63.68517843	64.74151207	65.3614018
.1307393369	v	1.175173504	2.522337866	4.402113906	7.501457024
360.	m	290.	220.	150.	80.
3.525705097	F	2.838165323	2.14915953	1.460553111	.7747312488
1.	t	8.	15.	22.	29.
.0020405467		.0454725878	0.158827482	.3673569324	0.722507442
6378.157008		6380.872034	6387.281949	6396.532847	6417.352005
56.91772225		62.07696214	63.87472619	64.85125928	65.42526066
.2659007708		1.345705184	2.750060007	4.741692165	8.160533964
350.		280.	210.	140.	70.
3.427646148		2.739783903	2.050715759	1.362340215	.6771808448
2.		9.	16.	23.	30.
.0046414744		.0569317579	.1820103136	.4072849858	0.791658556
6378.339497		6381.544297	6388.553615	6400.657999	6421.013987
58.32048401		62.42110332	64.04905274	64.95315132	65.4837478
.4053902567		1.522650272	2.989104956	5.106676446	8.921233787
340.		270.	200.	130.	60.
3.329522872		2.641377879	1.952285176	1.264190306	.5797788482
3.		10.	17.	24.	31.
.0083661024		.0698614905	.2071968746	.4502961894	0.867476272
6378.58952		6382.292988	6389.926818	6402.942245	6425.034477
59.31856623		62.7276934	64.20979988	65.04773167	65.53698835
.5493652389		1.706481683	3.240626753	5.50111794	9.820429703
330.		260.	190.	120.	50.
3.231342395		2.542952349	1.85387386	1.166112433	.4825445646
4.		11.	18.	25.	32.
.0132606971		0.084321722	.2344935397	0.496646145	
6378.907162		6383.120615	6391.407008	6405.399614	
60.08970882		63.00306736	64.35834204	65.13547037	
.6980481876		1.897729675	3.505966835	5.930122843	
320.		250.	180.	110.	
3.133110874		2.444512461	1.75548816	1.06811638	
5.		12.	19.	26.	

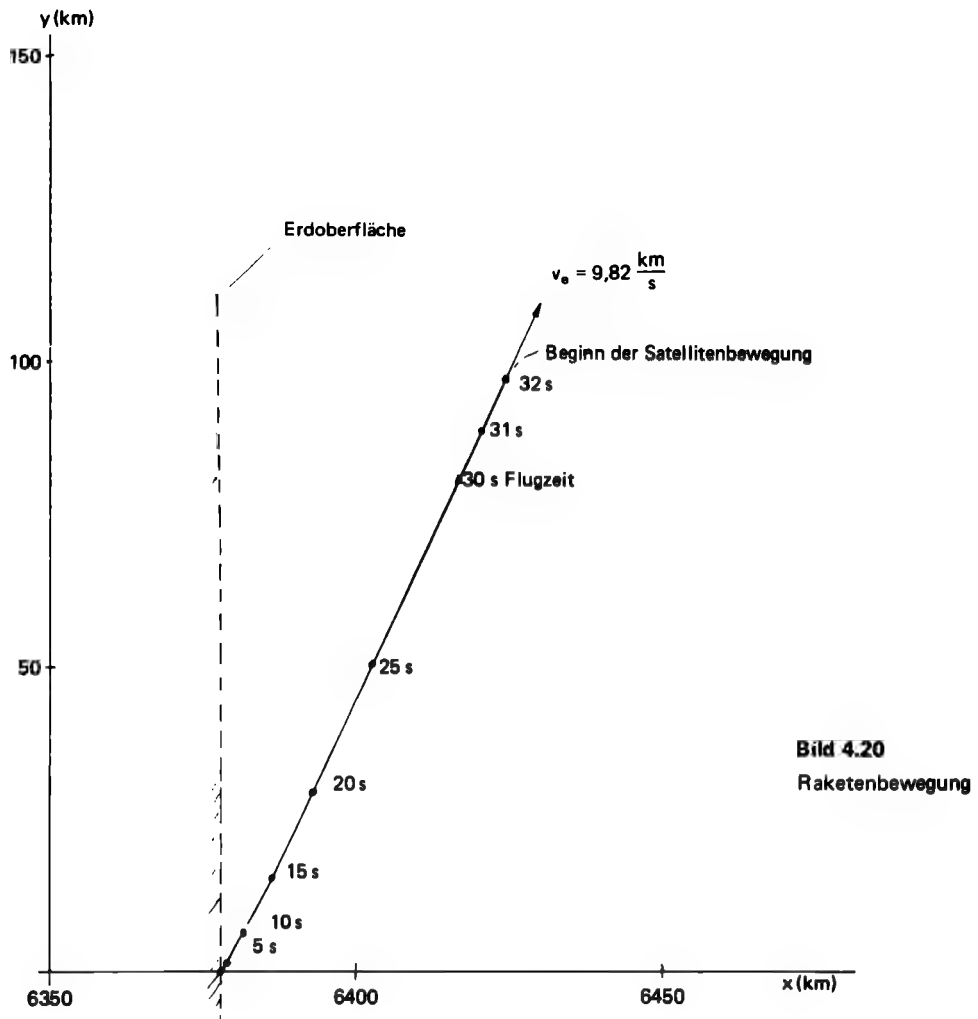


Bild 4.20
Raketenbewegung

Bild 4.20 zeigt graphisch die Flugphase. Nach 32 Sekunden ist der Treibstoff verbrannt und es beginnt eine Satellitenbewegung. Sie lässt sich mit dem Programm aus 4.1.3 weiterverfolgen.

4.2 Kinetik starrer Körper

Unter einem starren Körper versteht man idealisiert einen solchen, der bei Krafteinwirkung keine Formänderung aufweist. Diese Annahme hilft, viele Probleme ausreichend genau zu lösen.

4.2.1 Massenträgheitsmoment

Wir haben bisher Probleme der fortschreitenden Bewegung (Translation) betrachtet. Dabei hatten alle Masseteilchen eines starren Körpers die gleiche Bewegung und wir hatten ihn deshalb als Massenpunkt eingeführt. Wir kommen nun zur Drehung des starren Körpers um eine feste Achse (Rotation). Die beschleunigte Drehung eines starren Körpers in der Ebene um eine feste Achse wird durch die Einwirkung eines Drehmoments M hervorgerufen. Dabei vollführt jedes Massenteilchen dm , nach Bild 4.21, eine beschleunigte Bewegung. Aus der Kinematik wissen wir, daß ein Massenteil auf gekrümmter Bahn, einer Normal- und Tangentialbeschleunigung unterliegt. Dies führt nach dem d'Alembertschen Prinzip zu dem Ansatz

$$dF_t = dm a_t \quad (4.2.1)$$

und

$$dF_n = dm a_n. \quad (4.2.2)$$

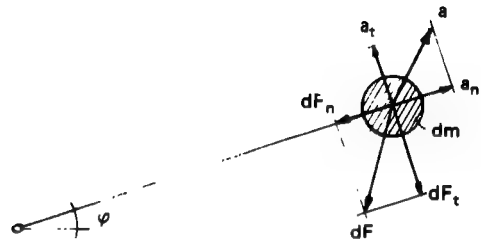


Bild 4.21 Beschleunigte Drehung

Während das Normalkraftdifferential dF_n kein Drehmoment hervorruft, seine Wirkungslinie geht durch den Drehpunkt, ruft das Tangentialkraftdifferential dF_t einen Drehmomentanteil von

$$dM = r dF_t \quad (4.2.3)$$

hervor. Für die Gesamtheit aller Anteile gilt damit

$$M = \int r dF_t = \int r dm a_t. \quad (4.2.4)$$

Mit

$$a_t = r \epsilon. \quad (4.2.5)$$

Darin ist ϵ die Winkelbeschleunigung, die für alle Masseteile gleich ist, also

$$M = \epsilon \int r^2 dm. \quad (4.2.6)$$

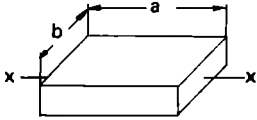
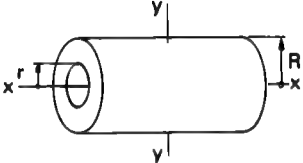

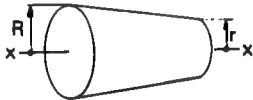
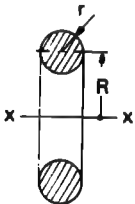
Analog zur Massenträgheit bei der Translation, $F = m a$, bezeichnet man

$$I_d = \int r^2 dm \quad (4.2.7)$$

als Massenträgheitsmoment eines starren Körpers. Genauer, da es sich auf eine Achse bezieht, als axiales Massenträgheitsmoment. Zu beachten ist, daß das Quadrat des Abstandes in die Gleichung eingeht.

Tabelle 4.10 zeigt die Zusammenstellung der Massenträgheitsmomente einfacher Grundkörper. Auch komplizierter gestaltete Körper lassen sich mit den Gleichungen berechnen, da die Summe der Massenträgheitsmomente einzelner Grundkörper gleich dem Massenträgheitsmoment des aus diesen bestehenden starren Körpers ist. Dies liegt an der Eigenschaft des Integrals in Gleichung (4.27). Nicht immer fällt nun die Drehachse des Grundkörpers mit der des starren Körpers zusammen. Dazu be-

Tabelle 4.10 Massenträgheitsmomente (axiale)

Körper	Massenträgheitsmoment
<p>Quader</p> 	$I_{dx} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$
<p>Hohlzylinder</p> 	$I_{dx} = \frac{m}{2} (R^2 + r^2)$ $I_{dy} = \frac{m}{4} \left(R^2 + r^2 - \frac{h^2}{3} \right)$
<p>Hohlkugel</p> 	$I_{dx} = 0.4 m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
<p>Gerader Kegelstumpf</p> 	$I_{dx} = 0.3 m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
<p>Kreisring</p> 	$I_{dx} = m \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$

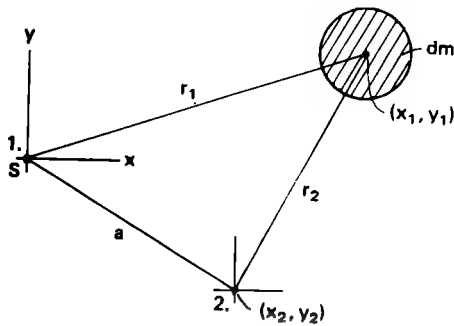


Bild 4.22

trachten wir nach Bild 4.22 das Massenträgheitsmoment bezüglich einer zweiten Achse gegenüber der Schwerpunktsachse. Es gilt für den Radius r_2 die geometrische Beziehung

$$r_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (4.2.8)$$

$$= x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2 y_1 y_2 + y_2^2 \quad (4.2.9)$$

$$= r_1^2 + a^2 - 2 (x_1 x_2 + y_1 y_2), \quad (4.2.10)$$

die eingesetzt in (4.2.7)

$$I_d = \int r_1^2 dm + a^2 \int dm - 2 \int (x_1 x_2 + y_1 y_2) dm \quad (4.2.11)$$

ergibt. Darin ist $\int dm = m$ und $-2 \int (x_1 x_2 + y_1 y_2) dm$ das statische Moment des starren Körpers bezüglich des Schwerpunktes, also Null. Damit folgt die, als Satz von Steiner (Verschiebungssatz) bekannte Gesetzmäßigkeit

$$I_{d2} = I_{d1} + m a^2. \quad (4.2.12)$$

Nun können wir die in Tabelle 4.10 angegebenen Formeln programmieren und mit Hilfe des Steiner'schen Satzes auf jede beliebige Achse umrechnen. Das heißt natürlich, daß die 2. Achse im Abstand a parallel zur 1. Achse verlaufen muß.

Tabelle 4.11 Speicherplatzbelegung

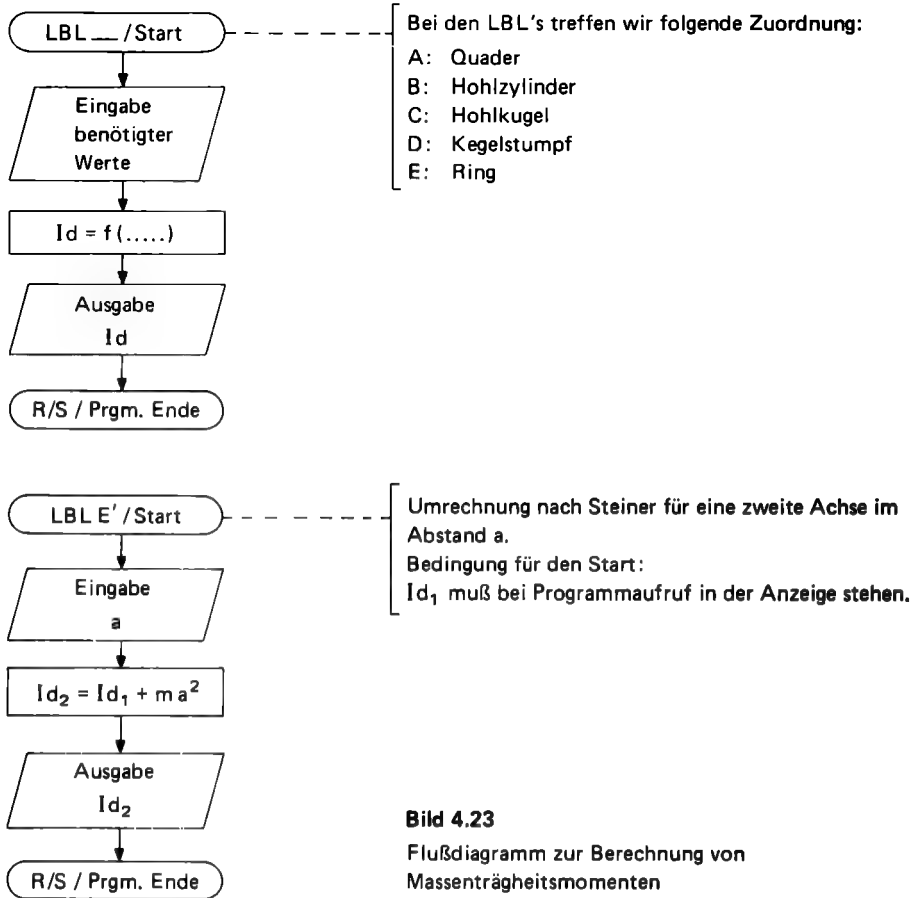
00 m 01 Zwischenspeicher

Nachfolgend soll noch ein Programm zur näherungsweisen Berechnung rotationssymmetrischer Körper jeglicher Querschnittsform aufgestellt werden. Dazu betrachten wir Masseteilchen nach der in Bild 4.23 dargestellten Form und erhalten

$$dm = \delta \cdot 2 \pi r h(r) dr. \quad (4.2.13)$$

In (4.2.7) eingesetzt

$$I_d = \delta \cdot 2 \pi \int_{r_1}^{r_2} r^3 h(r) dr. \quad (4.2.14)$$



Ersetzen wir hierin angenähert das Differential durch die Differenz, so erhalten wir

$$I_d = \delta \, 2 \pi \sum_{r_i = r_1}^{r_1 = r_2 - \Delta r} r_i^3 h(r_i) \Delta r. \quad (4.2.15)$$

Diese Formel läßt sich noch genauer gestalten, wenn wir das arithmetische Mittel der beiden Höhen eines Streifenelements bilden

$$I_d = \delta \, 2 \pi \sum_{r_i = r_1}^{r_1 = r_2 - \Delta r} r_i^3 \frac{h_1(r_i) + h_2(r_i)}{2} \Delta r. \quad (4.2.16)$$

Tabelle 4.12
Programm Massenträgheitsmomente
Quader:

000 76 LBL
001 11 A
002 91 R/S
003 99 PRT
004 42 STD
005 00 00
006 55 +
007 01 1
008 02 2
009 65 x
010 53 (
011 91 R/S
012 99 PRT
013 33 X²
014 85 +
015 91 R/S
016 99 PRT
017 33 X²
018 95 =
019 98 ADV
020 99 PRT
021 91 R/S

Hohlzylinder:

022 76 LBL
023 12 B
024 91 R/S
025 99 PRT
026 42 STD
027 00 00
028 55 +
029 04 4
030 65 x
031 53 (
032 91 R/S
033 99 PRT
034 33 X²
035 85 +
036 91 R/S
037 99 PRT
038 33 X²
039 75 -
040 32 X:T
041 91 R/S
042 99 PRT
043 33 X²
044 55 +

045 03 3
046 95 =
047 32 X:T
048 65 x
049 43 RCL
050 00 00
051 55 +
052 02 2
053 95 =
054 98 ADV
055 99 PRT
056 32 X:T
057 99 PRT
058 91 R/S

Hohlkugel:

059 76 LBL
060 13 C
061 91 R/S
062 99 PRT
063 42 STD
064 00 00
065 65 x
066 93 .
067 04 4
068 65 x
069 53 (
070 53 (
071 91 R/S
072 99 PRT
073 45 YX
074 32 X:T
075 05 5
076 75 -
077 91 R/S
078 99 PRT
079 42 STD
080 01 01
081 45 YX
082 05 5
083 54)
084 55 +
085 53 (
086 32 X:T
087 45 YX
088 03 3

089 75 -
090 43 RCL
091 01 01
092 45 YX
093 03 3
094 95 =
095 98 ADV
096 99 PRT
097 91 R/S

Kegelstumpf:

098 76 LBL
099 14 D
100 91 R/S
101 99 PRT
102 42 STD
103 00 00
104 65 x
105 93 .
106 03 3
107 65 x
108 53 (
109 53 (
110 91 R/S
111 99 PRT
112 45 YX
113 32 X:T
114 05 5
115 75 -
116 91 R/S
117 99 PRT
118 42 STD
119 01 01
120 45 YX
121 05 5
122 54)
123 55 +
124 53 (
125 32 X:T
126 45 YX
127 03 3
128 75 -
129 43 RCL
130 01 01
131 45 YX
132 03 3

133 95 =
134 98 ADV
135 99 PRT
136 91 R/S

Kreisring:

137 76 LBL
138 15 E
139 91 R/S
140 99 PRT
141 42 STD
142 00 00
143 65 x
144 53 (
145 91 R/S
146 99 PRT
147 33 X²
148 85 +
149 03 3
150 65 x
151 91 R/S
152 99 PRT
153 33 X²
154 55 +
155 04 4
156 95 =
157 98 ADV
158 99 PRT
159 91 R/S

Verschiebesatz:

160 76 LBL
161 10 E*
162 99 PRT
163 85 +
164 43 RCL
165 00 00
166 99 PRT
167 65 x
168 91 R/S
169 99 PRT
170 33 X²
171 95 =
172 98 ADV
173 99 PRT
174 91 R/S

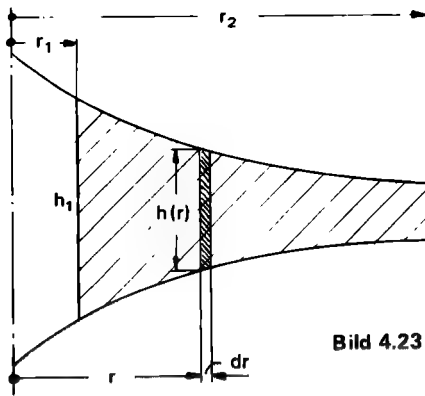


Bild 4.23

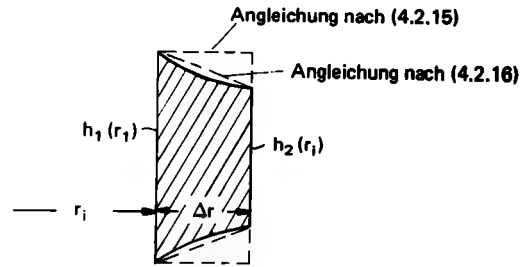


Bild 4.24
Masselement

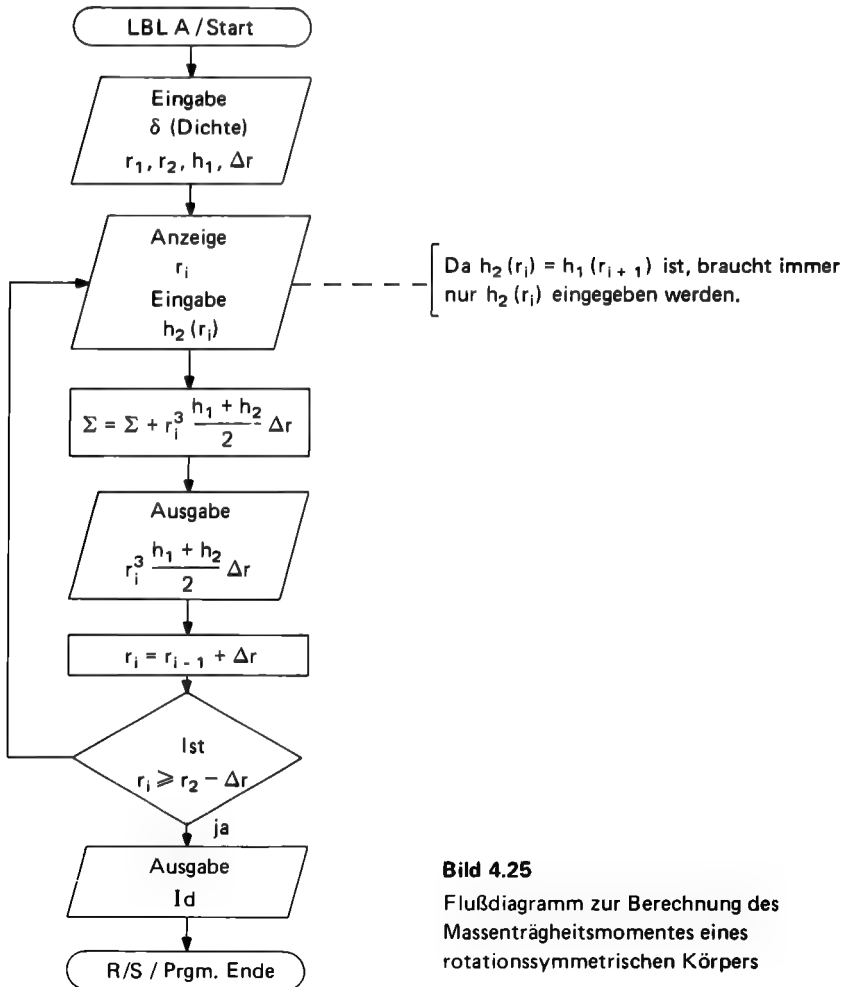


Bild 4.25

Flußdiagramm zur Berechnung des
Massenträgheitsmomentes eines
rotationssymmetrischen Körpers

Tabelle 4.13 Speicherplatzbelegung

00
 01 δ
 02 r_1/r_i
 03 $r_2 - \Delta r$
 04 Δr
 05 Σ
 06 $h_1(r_i)$

Tabelle 4.14 Programm Massenträgheitsmoment eines rotationssymmetrischen Körpers

Start/Eingabe:

000 76 LBL	024 06 06	043 32 X↑T	063 77 GE
001 11 A	025 98 ADV	044 42 STD	064 99 PRT
002 47 CMS		045 06 06	065 43 RCL
003 91 R/S	Anzeige/Eingabe:	046 54 >	066 04 04
004 99 PRT	026 76 LBL	047 55 ÷	067 44 SUM
005 42 STD	027 43 RCL	048 02 2	068 02 02
006 01 01	028 03 3	049 95 =	069 61 GTD
007 91 R/S	029 32 X↑T	050 99 PRT	070 43 RCL
008 99 PRT	030 43 RCL	051 98 ADV	
009 42 STD	031 02 02		Endausgabe:
010 02 02	032 45 YX	Summe:	071 76 LBL
011 91 R/S	033 99 PRT	052 65 ×	072 99 PRT
012 99 PRT	034 91 R/S	053 43 RCL	073 43 RCL
013 75 -	035 99 PRT	054 04 04	074 05 05
014 91 R/S		055 95 =	075 65 ×
015 99 PRT	Berechnung:	056 44 SUM	076 43 RCL
016 42 STD	036 32 X↑T	057 05 05	077 01 01
017 04 04	037 95 =	Abfrage/Ende:	078 65 ×
018 95 =	038 65 ×		079 02 2
019 42 STD	039 53 <	058 43 RCL	080 65 ×
020 03 03	040 43 RCL	059 03 03	081 89 π
021 91 R/S	041 06 06	060 32 X↑T	082 95 =
022 99 PRT	042 85 +	061 43 RCL	083 98 ADV
023 42 STD		062 02 02	084 99 PRT
			085 91 R/S

4.2.2 Das physikalische Pendel

Wird ein Körper außerhalb seines Schwerpunktes drehbar gelagert, siehe Bild 4.26, so führt er, unter Auslenkung aus seiner stabilen Lage, Schwingungen ähnlich denen des Fadenpendels durch. Es gilt analog

$$I_d \epsilon = - m g l \sin \varphi \quad (4.2.17)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{m g l}{I_d} \sin \varphi. \quad (4.2.18)$$

Nach der Euler-Cauchy-Methode folgt

$$\Delta \omega = - \frac{m g l}{I_d} \sin \varphi \quad (4.2.19)$$

die Differenzengleichung der Bewegung. Wenn wir diese mit der des Fadenpendels vergleichen, Gleichung (4.1.31), und eine reduzierte Pendellänge, der Art

$$l_{\text{red}} = \frac{I_d}{m} \quad (4.2.20)$$

eingeführen, ergibt sich

$$\Delta\omega = -\frac{g}{l_{\text{red}}} \sin\varphi \cdot \Delta t \quad (4.2.21)$$

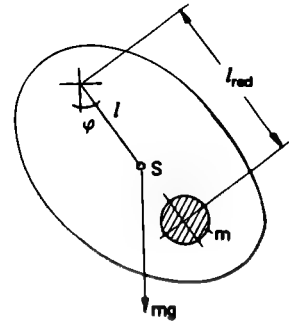


Bild 4.26
Physikalisches Pendel

eine Übereinstimmung. Es ist also kein neues Programm notwendig, sondern wir können unter Benutzung der reduzierten Pendellänge nach (4.2.20) das Programm Fadenpendel benutzen.

4.2.3 Reduzierte Masse und Schwungmoment

Betrachten wir noch einmal Gleichung (4.2.7). Darin ist der Radius r abhängig von der Lage des Massenelements dm . Stellt man sich nun die gesamten Masseteilchen dm auf einem konstanten Radius vor, etwa wie bei einem Zylinder mit sehr geringer Wandstärke, so läßt sich schreiben

$$I_d = r^2 \int dm. \quad (4.2.22)$$

Die Größe $\int dm$ ergibt sich damit für ein bekanntes I und einen beliebig gewählten Radius r zu

$$\int dm = \frac{I_d}{r^2} = m_{\text{red}} \quad (4.2.23)$$

und wird als reduzierte Masse bezeichnet. Mit der Annahme, daß die reduzierte Masse der Masse des Drehkörpers entspricht, ergibt sich nach (4.2.23) ein bestimmter Radius

$$i = \sqrt{\frac{I_d}{m}}, \quad (4.2.24)$$

der als Trägheitsradius bezeichnet wird. Unter Definition eines Trägheitsdurchmessers

$$D_i = 2i, \quad (4.2.25)$$

folgt eingesetzt

$$mD_i^2 = 4I_d. \quad (4.2.26)$$

Diese Größe wird allgemein als Schwungmoment bezeichnet. Danach können wir das unter 4.2.1 aufgestellte Programm um die in Bild 4.27 dargestellten Programmteile ergänzen.

Tabelle 4.15

Speicherplatzbelegung

00 m

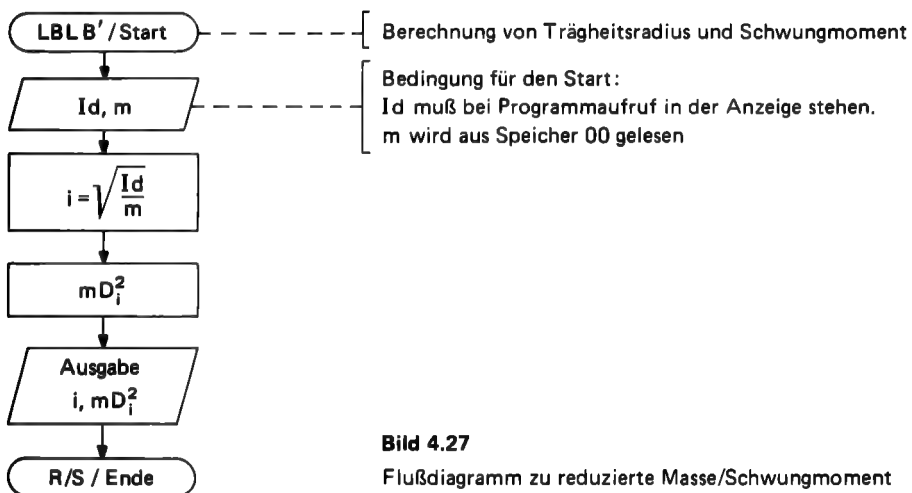
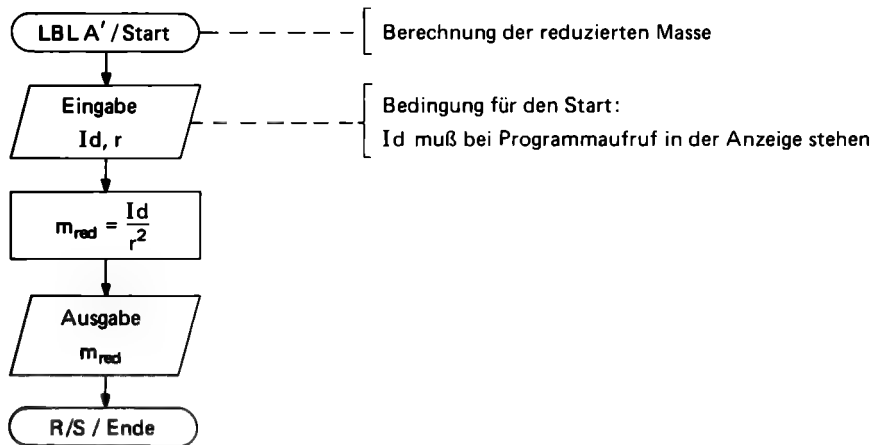


Bild 4.27

Flußdiagramm zu reduzierte Masse/Schwungmoment

Tabelle 4.16 Programm reduzierte Masse/Schwungmoment

reduzierte Masse:

```

175 76 LBL
176 16 R1
177 99 PRT
178 55 ÷
179 91 R/S
180 99 PRT
181 33 X2
182 95 =
183 98 ADV
  
```

```

184 99 PRT
185 91 R/S
  
```

Schwungmoment:

```

186 76 LBL
187 17 B1
188 99 PRT
189 55 ÷
  
```

```

190 43 RCL
191 00 00
192 99 PRT
193 95 =
194 34 F%
195 98 ADV
196 99 PRT
197 65 ×
198 02 2
  
```

```

199 95 =
200 33 X2
201 65 ×
202 43 RCL
203 00 00
204 95 =
205 99 PRT
206 91 R/S
  
```

4.2.4 Deviationsmomente

Bei rotierenden, starren Körpern wird auch nach der auftretenden Lagerreaktion oder den inneren Spannungen gefragt. Dies führt zu folgender Überlegung. Wird ein, nach Bild 4.28, um die z-Achse rotierender Körper, plötzlich zu einer weiteren Achse, z.B. zur x-Achse, fest fixiert, so würde ein Masseteilchen des Körpers das Momentdifferential

$$dM_x = z dF_y \quad (4.2.27)$$

bewirken. Der Kraftanteil ergibt sich aus

$$dF_y = dF_n \sin \varphi + dF_t \cos \varphi. \quad (4.2.28)$$

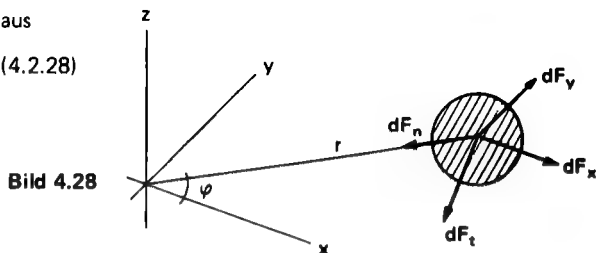


Bild 4.28

Die zum Mittelpunkt der Bahn weisende Führungskraft F_n , hier Zentripetalkraft genannt, ergibt sich nach dem d'Alembertschen Prinzip aus der Normal- bzw. Zentripetalbeschleunigung. Diese wiederum nach den Ansätzen aus der Kinematik zu

$$dF_n = a_n dm = r \omega^2 dm. \quad (4.2.29)$$

Analog folgt für den Tangentialkraftanteil

$$dF_t = a_t dm = r \epsilon dm. \quad (4.2.30)$$

Für alle Masseteile damit

$$M_x = \int z dF_y = \int z r \omega^2 dm \sin \varphi + \int z r \epsilon dm \cos \varphi. \quad (4.2.31)$$

Da ω und ϵ für alle Teile gleich, folgt

$$M_x = \omega^2 \int z y dm + \epsilon \int z x dm. \quad (4.2.32)$$

Darin bezeichnet man allgemein, analog zum Massenträgheitsmoment,

$$I_{d_{xz}} = \int x z dm \quad (4.2.33)$$

als Deviations- oder Zentrifugalmoment. Der Sonderfall

$$I_{d_{xx}} = \int x^2 dm \quad (4.2.34)$$

wird als polares Trägheitsmoment bezeichnet. Analog zum Massenträgheitsmoment wollen wir auch hier ein entsprechendes Programm für die in Tabelle 4.17 dargestellten Deviationsmomente einfacher Grundkörper aufstellen. Diese wenigen sollen als Beispiel genügen. Analog zum Steinerschen Satz gilt auch hier, siehe Bild 4.29,

$$I_{d_{\alpha\beta}} = I_{d_{xy}} + mab. \quad (4.2.35)$$

Da die Programme den gleichen Aufbau wie Bild 4.23 haben, erspare ich mir an dieser Stelle ein Flußdiagramm.

Tabelle 4.17 Deviationsmomente

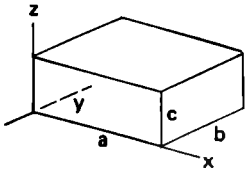
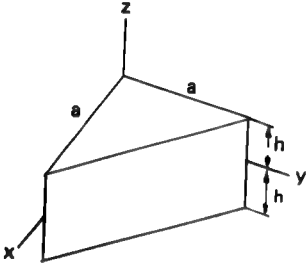
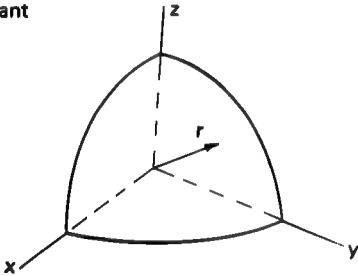
Körper	Deviationsmoment
Quader 	$I_{d_{xy}} = -\frac{m}{4} ab$
Keil 	$I_{d_{xy}} = -\frac{ma^2}{12}$ $I_{d_{xz}} = I_{d_{yz}} = 0$
Kugeloktant 	$I_{d_{xy}} = -\frac{2mr^2}{5\pi}$

Tabelle 4.18
Speicherplatzbelegung
00 m

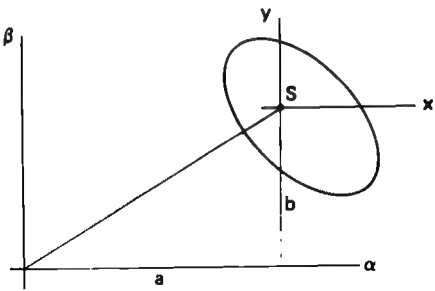


Bild 4.29

Tabelle 4.19 Programm Deviationsmomente

Quader:			Keil:			Kugeloktant:			Verschiebung:		
000	76	LBL	019	76	LBL	037	76	LBL	058	76	LBL
001	11	A	020	12	B	038	13	C	059	10	E
002	91	R/S	021	91	R/S	039	91	R/S	060	99	PRT
003	99	PRT	022	99	PRT	040	99	PRT	061	85	+
004	42	STD	023	42	STD	041	42	STD	062	43	RCL
005	00	00	024	00	00	042	00	00	063	00	00
006	94	+/-	025	94	+/-	043	94	+/-	064	65	x
007	55	÷	026	65	x	044	65	x	065	91	R/S
008	04	4	027	91	R/S	045	02	2	066	99	PRT
009	65	x	028	99	PRT	046	65	x	067	65	x
010	91	R/S	029	33	X²	047	91	R/S	068	91	R/S
011	99	PRT	030	55	÷	048	99	PRT	069	99	PRT
012	65	x	031	01	1	049	33	X²	070	95	=
013	91	R/S	032	02	2	050	55	÷	071	98	ADV
014	99	PRT	033	95	=	051	05	5	072	99	PRT
015	95	=	034	98	ADV	052	55	÷	073	91	R/S
016	98	ADV	035	99	PRT	053	89	π			
017	99	PRT	036	91	R/S	054	95	=			
018	91	R/S				055	98	ADV			
						056	99	PRT			
						057	91	R/S			

4.2.5 Massenkräfte beim Kurbeltrieb und ihr Ausgleich

Der Kurbeltrieb dient zur Umwandlung von Schub- in Drehbewegung und umgekehrt. Wir wollen an dieser Stelle speziell den Bewegungsablauf eines Kolbenmotors betrachten. Der algebraische Ausdruck für die reale Kolbenbewegung ergibt sich, unter Betrachtung von Bild 4.30, aus folgender Ableitung

$$x = l + r - l \cos \beta - r \sin \varphi \quad (4.2.36)$$

$$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{\sin \beta}{\cos \varphi} \quad (4.2.37)$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \varphi} \quad (4.2.38)$$

$$x = r(1 - \sin \varphi) + l(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \varphi}), \quad (4.2.39)$$

bzw. bei allgemeiner Phasenverschiebung um α

$$x = r(1 - \sin(\varphi - \alpha)) + l(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2(\varphi - \alpha)}). \quad (4.2.40)$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich wiederum angenähert aus den Differenzenquotienten

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.2.41)$$

und

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (4.2.42)$$

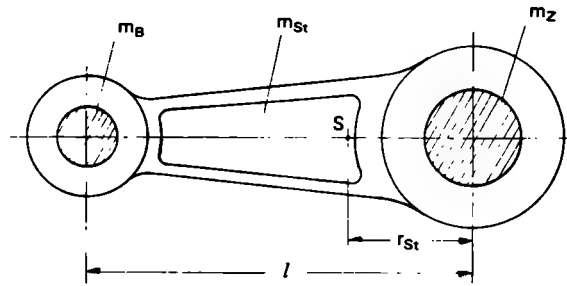
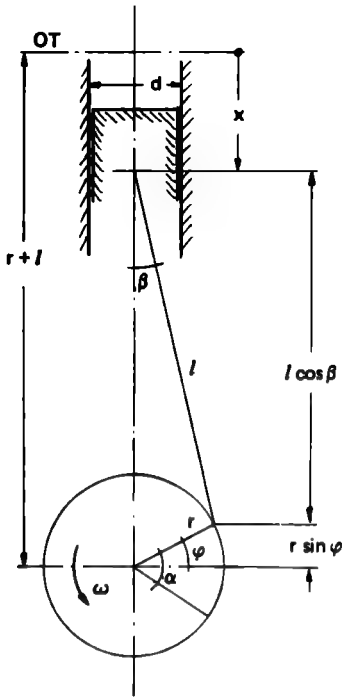


Bild 4.31 Schubstange

Bild 4.30
Kolbenmotor

Den Bewegungen der Triebwerksteile gemäß, werden oszillierende und rotierende Massen unterschieden. Danach ergibt sich die oszillierende Masse aus

$$m_0 = m_{St} \frac{r_{St}}{l} + m_K + m_B. \quad (4.2.43)$$

Darin ist m_{St} der Massenanteil der Schubstange, der nach Bild 4.31 durch den Faktor r_{St}/l seinen oszillierenden Anteil hat, m_K die Kolbenmasse und m_B die Kolbenbolzenmasse. Die rotierenden Massenteile setzen sich aus

$$m_R = m_{St} \frac{l - r_{St}}{l} + m_W \frac{r_W}{r} + m_Z + m_N \quad (4.2.44)$$

zusammen. Darin ist $m_{St}(l - r_{St})/l$ der rotierende Massenanteil der Schubstange, m_W die Kurbelwangenmasse, die nach Bild 4.32 durch den Faktor r_W/r auf den Drehmittelpunkt reduziert werden muß, m_Z die Kurbelzapfenmasse und m_N die Nadellagermasse. Die oszillierende Massenkraft heißt damit

$$F_0 = m_0 \ddot{a}_K \quad (4.2.45)$$

und die rotierende Massenkraft

$$F_R = m_R r \omega^2. \quad (4.2.46)$$

Die auf den Kolben einwirkende Kraft, z. B. durch Zündung eines Gasgemisches und der damit verbundenen Druckzunahme, sorgt für eine Entspannungsbewegung des Systems, d. h. eine Vergrößerung des Zylinderraumes durch Kolbenbewegung. Die Kraft liegt in der Regel indirekt als Indikator-

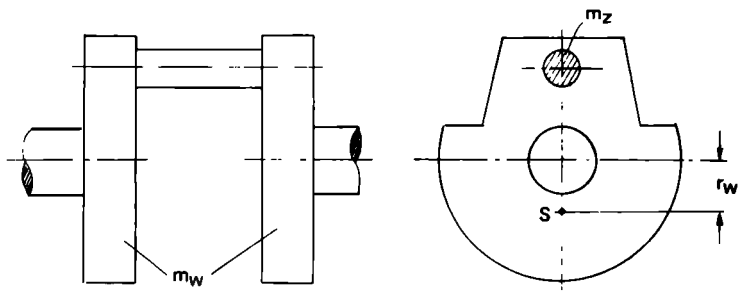


Bild 4.32
Kurbelwange

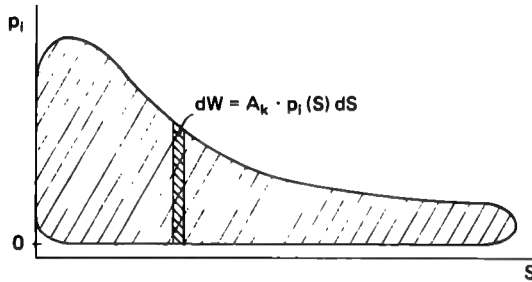


Bild 4.33
Indikatordiagramm

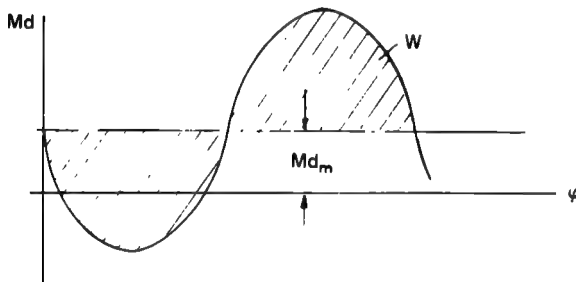


Bild 4.34
Drehmomentenverlauf

diagramm (Bild 4.33) vor. Diese praktische Meßwertaufnahme zeigt den Zylinderdruck über dem Weg. Die obere Kurve stellt die Entspannungsphase und die untere die Kompressionsphase dar. Die schraffierte Fläche ist ein Maß für die geleistete Arbeit. Die Kolbenkraft ergibt sich über die Kolbenfläche und den indizierten Druck zu

$$F_k = \frac{\pi d^2}{4} p_i. \quad (4.2.47)$$

Die Kompressionsphase wird durch die in einem Schwungrad bei der Entspannungsphase gespeicherte Energie übernommen. Das Schwungrad ist für die Laufruhe eines Motors von entscheidender Wichtigkeit. Durch die Triebwerksbewegung und durch die Veränderung des indizierten Drucks ergeben sich Drehmomentenverläufe, wie sie Bild 4.34 wiedergibt. Daraus resultiert ein mittleres

Drehmoment M_{d_m} . Die Abweichungen von diesem kennzeichnen das Arbeitsvermögen W . Dieses wiederum bestimmt das Trägheitsmoment der Schwungscheibe. Aus der vorhandenen Winkelgeschwindigkeit und einem angenommenem Ungleichförmigkeitsgrad ergibt sich das Trägheitsmoment aus der Gleichung

$$I_d = \frac{W}{\delta \omega^2}. \quad (4.2.48)$$

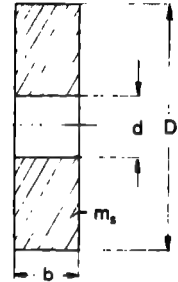
Der Ungleichförmigkeitsgrad ist das Verhältnis der Differenzen der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit der Schwungmassen ω_{\max} bzw. ω_{\min} zu ihrem Mittelwert. Er wird aus Erfahrung bestimmt. Der Durchmesser der Schwungscheibe nach Bild 4.35 ergibt sich aus der Ableitung

$$I_d = \frac{\pi}{32} \frac{m_s}{g} (D^4 - d^4) b \quad (4.2.49)$$

zu

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 I_d}{\pi \frac{m_s}{g} b} + d^4}. \quad (4.2.50)$$

Bild 4.35
Schwungscheibe



Kommen wir zum konkreten Programm. Dazu wollen wir, mittels vorhandenen Drucks, die Bewegungsverhältnisse des Kurbeltriebs wiedergeben. Die Druckeingabe soll dabei durch ein Unterprogramm geschehen, um diesen nach einem vorliegenden Indikatordiagramm oder mittels funktionaler Verhältnisse anzugeben. Bild 4.36 zeigt das entsprechende Flußdiagramm.

Tabelle 4.20 Speicherplatzbelegung

00 Δt	05 r	10 F_i	15 v_{k_i}
01 $\Delta \varphi$	06 l	11 β_i	16 $\sum M_d \Delta \varphi$
02 φ	07 d_k	12 F_{Sti}	17 $\sum \omega$
03 m_R	08 x	13 $90 - \varphi_i - \beta_i$	18 n
04 m_0	09 Δx	14 t_i	19 φ_0

4.2.6 Realer Stoß fester Körper

Das Zusammentreffen zweier bewegter Massen m_1 und m_2 , bezeichnet man als Stoß. Dieser Vorgang unterteilt sich in zwei Phasen. Dies zeigt Bild 4.37. Die in der Realität teilelastischen und teilplastischen Massen m_1 und m_2 , verlieren einen Teil ihrer kinetischen Energie durch Umformarbeit. Am Ende der ersten Phase bewegen sich beide Körper mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.2.51)$$

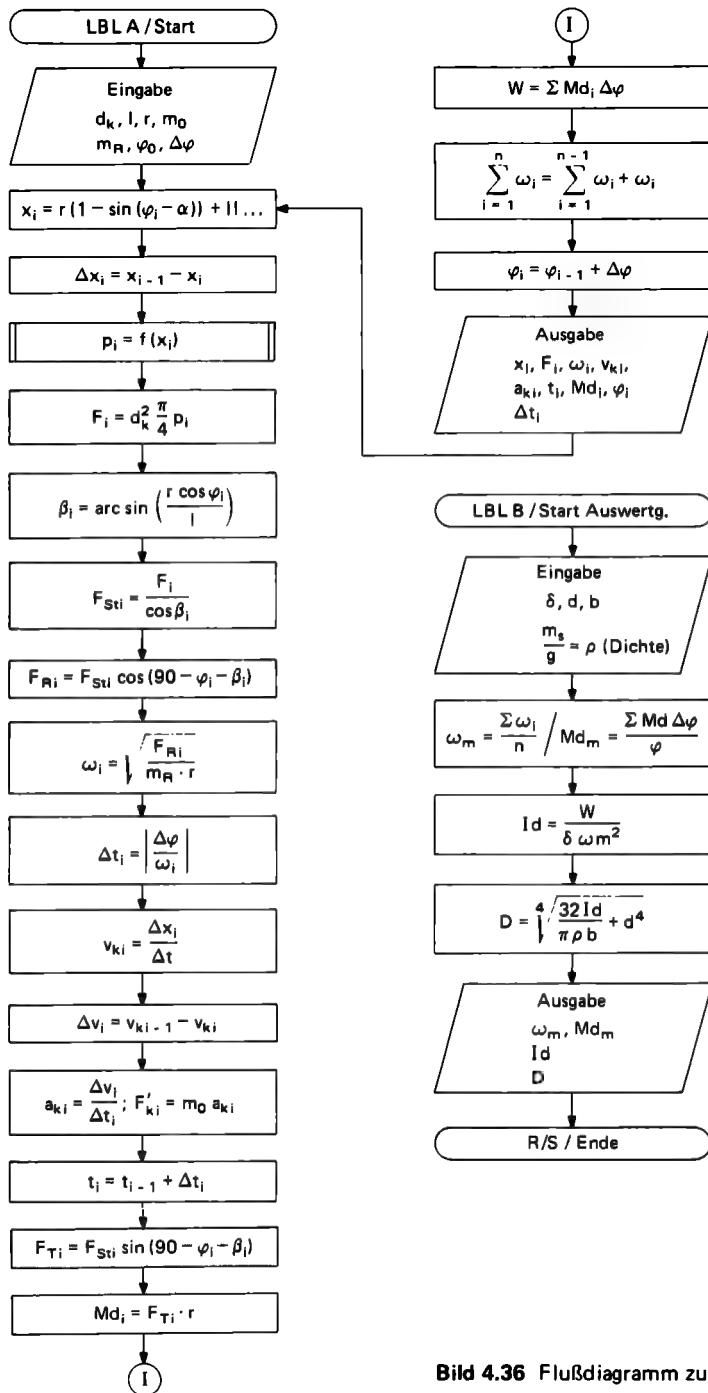


Bild 4.36 Flußdiagramm zur Schubkurbelbewegung

Tabelle 4.21 Programm Schubkurbel

Start/Eingabe:			β_j :	$t_j, \Delta t_j$:	Abschluß:
000	76	LBL	045 43 RCL	095 32 X:T	146 65 ×
001	11	A	046 05 05	096 00 0	147 43 RCL
002	47	CMS	047 65 ×	097 67 EQ	148 01 01
003	07	7	048 43 RCL	098 22 INV	149 95 =
004	42	STD	049 02 02	099 32 X:T	150 44 SUM
005	00	00	050 39 CDS	100 35 1/X	151 16 16
006	91	R/S	051 55 +	101 65 ×	152 43 RCL
007	99	PRT	052 43 RCL	102 43 RCL	153 14 14
008	72	ST*	053 06 06	103 01 01	154 99 PRT
009	00	00	054 95 =	104 95 =	155 01 1
010	97	DSZ	055 22 INV	105 50 I×I	156 44 SUM
011	00	00	056 38 SIN	106 76 LBL	157 18 18
012	00	00	057 42 STD	107 22 INV	158 43 RCL
013	06	06	058 11 11	108 99 PRT	159 01 01
014	98	ADV		109 42 STD	160 44 SUM
Ausgabe φ_j :			F_{Sti} :	110 00 00	161 02 02
015	43	RCL	059 39 CDS	111 44 SUM	162 98 ADV
016	02	02	060 35 1/X	112 14 14	163 61 GTD
017	42	STD	061 65 ×		164 43 RCL
018	19	19	062 43 RCL	v_{ki}, a_{ki} :	
Berechnung x:			063 10 10	113 35 1/X	Unterprogramm
019	71	SBR	064 95 =	114 65 ×	Berechnung x:
020	16	A'	065 42 STD	115 43 RCL	165 76 LBL
			066 12 12	116 09 09	166 16 A'
Rücksprungmarke:			F_{Ri} :	117 95 =	167 53 (
021	76	LBL	067 65 ×	118 99 PRT	168 43 RCL
022	43	RCL	068 53 (119 48 EXC	169 05 05
Berechnung x:			069 09 9	120 15 15	170 65 ×
023	71	SBR	070 00 0	121 75 -	171 53 (
024	16	A'	071 75 -	122 43 RCL	172 01 1
025	43	RCL	072 43 RCL	123 15 15	173 75 -
026	02	02	073 02 02	124 95 =	174 43 RCL
027	99	PRT	074 75 -	125 55 +	175 02 02
028	43	RCL	075 43 RCL	126 43 RCL	176 38 SIN
029	08	08	076 11 11	127 00 00	177 54)
030	99	PRT	077 54)	128 95 =	178 85 +
Eingabe p_j :			078 42 STD	129 99 PRT	179 43 RCL
031	71	SBR	079 13 13	F_{oi} :	180 06 06
032	15	E	080 39 CDS	130 65 ×	181 65 ×
F_j :			081 95 =	131 43 RCL	182 53 (
033	65	×	082 99 PRT	132 04 04	183 01 1
034	43	RCL	ω_j :	133 95 =	184 75 -
035	07	07	083 55 +	134 99 PRT	185 53 (
036	33	X ²	084 43 RCL	Md :	186 01 1
037	65	×	085 03 03	135 43 RCL	187 75 -
038	89	π	086 55 +	136 13 13	188 53 (
039	55	+	087 43 RCL	137 38 SIN	189 43 RCL
040	04	4	088 05 05	138 65 ×	190 05 05
041	95	=	089 95 =	139 43 RCL	191 55 +
042	99	PRT	090 50 I×I	140 12 12	192 43 RCL
043	42	STD	091 34 I×I	141 65 ×	193 06 06
044	10	10	092 99 PRT	142 43 RCL	194 54)
			093 44 SUM	143 05 05	195 33 X ²
			094 17 17	144 95 =	196 65 ×
				145 99 PRT	197 43 RCL
					198 02 02
					199 39 CDS
					200 33 X ²

Auswertungsprogramm

201	54)	240	76	LBL	262	19	19	284	55	÷
202	34	FX	241	12	B	263	54)	285	89	if
203	54)	242	98	ADV	264	95	=	286	91	R/S
204	54)	243	98	ADV	265	99	PRT	287	99	PRT
205	48	ENC	244	98	ADV	266	98	ADV	288	55	÷
206	08	08	245	43	RCL	267	43	RCL	289	91	R/S
207	75	-	246	17	17	268	16	16	290	99	PRT
208	43	RCL	247	55	÷	269	50	I×I	291	85	÷
209	08	08	248	43	RCL	270	55	÷	292	91	R/S
210	54)	249	18	18	271	43	RCL	293	99	PRT
211	42	STD	250	95	=	272	00	00	294	45	YX
212	09	09	251	99	PRT	273	33	X²	295	04	4
213	92	RTN	252	42	STD	274	55	÷	296	95	=
Unterprogramm			253	00	00	275	91	R/S	297	45	YX
Eingabe p _i :			254	43	RCL	276	99	PRT	298	93	.
214	76	LBL	255	16	16	277	95	=	299	02	2
215	15	E	256	55	÷	278	98	ADV	300	05	5
216	91	R/S	257	53	(279	99	PRT	301	95	=
217	99	PRT	258	43	RCL	280	98	ADV	302	98	ADV
218	92	RTN	259	02	02	281	65	×	303	99	PRT
			260	75	-	282	03	3	304	91	R/S
			261	43	RCL	283	02	2			

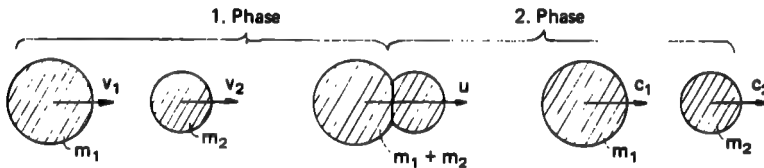


Bild 4.37
Stoßvorgang

Danach wird der elastische Anteil der Umformarbeit wieder in kinetische Energie umgesetzt und die Geschwindigkeiten der Massen lauten zum Ende der zweiten Phase

$$c_1 = u - \frac{k(v_1 - v_2) m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.2.52)$$

und

$$c_2 = u + \frac{k(v_1 - v_2) m_1}{m_1 + m_2} \quad (4.2.53)$$

Dabei sind die Vorzeichen der Geschwindigkeitsrichtungen zu beachten. Aus der Energiebilanz folgt der Energieverlust beim Stoß

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} (1 - k^2) \quad (4.2.54)$$

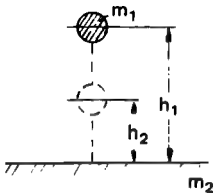
Der in diesen Gleichungen enthaltene Stoßfaktor k berücksichtigt die plastischen und elastischen Eigenschaften der Massen. Er ergibt sich aus den Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß zu

$$k = \frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2} \quad (4.2.55)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt er sich durch ein einfaches Experiment bestimmen. Nach Bild 4.38 fällt eine Masse m_1 aus der Höhe h_1 auf eine Unterlage m_2 . Aus der Relation der Rücksprunghöhe h_2 zur Fallhöhe h_1 , über die Umrechnung der potentiellen in kinetische Energien vor und nach dem Stoß, bestimmt sich der Faktor aus

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}. \tag{4.2.56}$$

Bild 4.38
Experimentelle Bestimmung
des Stoßfaktors



Häufige Stoßzahlen zeigt Tabelle 4.22. Der Berechnungsalgorithmus folgt in Bild 4.39.

Tabelle 4.22

Stoßfaktoren

Material	k
Elfenbein	8/9
Stahl	5/8
Kork	5/9
Glas	15/16

Tabelle 4.23

Speicherplatzbelegung

00 Zähler/ $m_1 + m_2$	03 m_2
01 k	04 v_1
02 v_2	05 m_1
	06 $k(v_1 - v_2)$

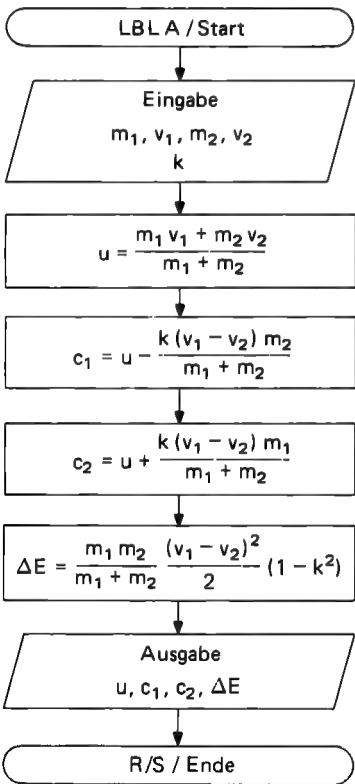


Bild 4.39
Flußdiagramm zum Stoßvorgang

Tabelle 4.24 Programm Stoßvorgang

000	76	LBL	026	95	=	052	54)	078	43	RCL
001	11	A	027	55	÷	053	42	STD	079	03	03
002	47	CMS	028	53	(054	06	06	080	55	÷
003	05	5	029	43	RCL	055	65	×	081	43	RCL
004	42	STD	030	05	05	056	43	RCL	082	00	00
005	00	00	031	85	+	057	03	03	083	65	×
006	91	R/S	032	43	RCL	058	55	÷	084	53	(
007	99	PRT	033	03	03	059	43	RCL	085	43	RCL
008	72	ST*	034	54)	060	00	00	086	04	04
009	00	00	035	42	STD	061	95	=	087	75	-
010	97	DSZ	036	00	00	062	99	PRT	088	43	RCL
011	00	00	037	95	=	063	32	X↑T	089	02	02
012	00	00	038	99	PRT	064	85	+	090	54)
013	06	06	039	75	-	065	43	RCL	091	33	X²
014	98	ADV	040	32	X↑T	066	06	06	092	55	÷
015	43	RCL	041	53	(067	65	×	093	02	2
016	05	05	042	43	RCL	068	43	RCL	094	65	×
017	65	×	043	01	01	069	05	05	095	53	(
018	43	RCL	044	65	×	070	55	÷	096	01	1
019	04	04	045	53	(071	43	RCL	097	75	-
020	85	+	046	43	RCL	072	00	00	098	43	RCL
021	43	RCL	047	04	04	073	95	=	099	01	01
022	03	03	048	75	-	074	99	PRT	100	33	X²
023	65	×	049	43	RCL	075	43	RCL	101	95	=
024	43	RCL	050	02	02	076	05	05	102	99	PRT
025	02	02	051	54)	077	65	×	103	91	R/S

Verläuft die senkrecht auf den Berührungsflächen stehende Stoßnormale durch die Schwerpunkte beider Massen, so spricht man vom zentralen Stoß, dessen Gesetzmäßigkeit wir vorher abgehandelt haben. Beim exzentrischen Stoß unterscheidet man nach der Geschwindigkeitsrichtung beider Massen den geraden und den schiefen Stoß. Der gerade exzentrische Stoß nach Bild 4.40 läßt sich auf einen zentralen Stoß zurückführen, wenn man die reduzierte Masse

$$m_{\text{red}} = \frac{I d_1}{a^2} \quad (4.2.57)$$

und die Geschwindigkeit

$$v_1 = a \omega_1 \quad (4.2.58)$$

einsetzt. Beim schiefen Stoß sind nur die Geschwindigkeitskomponenten bezüglich der Stoßnormalen am Stoß beteiligt. So gelten als Beispiel für einen schiefen Stoß gegen eine Wand nach Bild 4.41 die Gesetzmäßigkeiten

$$v_{2t} = v_{1t} \quad (4.2.59)$$

und

$$v_{2n} = -k v_{1n}. \quad (4.2.60)$$

Bild 4.40

Gerader exzentrischer Stoß

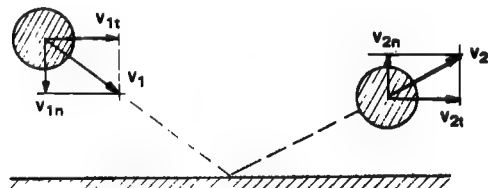
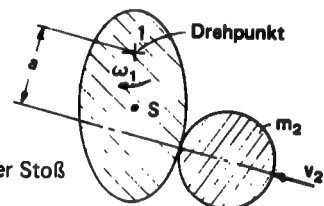


Bild 4.41 Schiefer Stoß gegen eine Wand

Gesetze über den Drehstoß lauten analog und sind im gleichen Sinne programmierbar.

4.2.7 Anwendungsbeispiele

– 1 –

Das Massenträgheitsmoment des in Bild 4.42 dargestellten Körpers ist zu bestimmen (Dichte $7.85 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$).

Der Körper unterteilt sich in drei Grundkörper, in zwei Quader und einen Hohlzylinder. Ihre Massen betragen

$$m_1 = 246.6 \text{ kg}$$

$$m_2 = 117.8 \text{ kg}$$

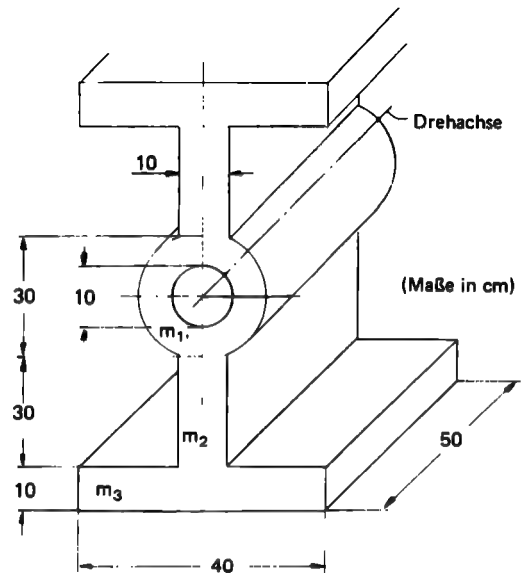
$$m_3 = 157 \text{ kg}$$

Damit folgt durch das Programm 4.12

Eingabe: 246.6 m_1 Zuvor Programmteil
30. R B (Hohlzylinder)
10. r aufgerufen.
50. h

Ausgabe: 123300. Id_x
10275. Id_y

Bild 4.42
Rotationskörper



Da Drehachse-Hohlzylinder und Drehachse-Körper zusammenfallen, braucht eine Umrechnung nach dem Steinerschen Satz nicht durchgeführt werden. Für die beiden Quader ist dies jedoch der Fall. Dazu wird Programmteil E' aufgerufen.

2. Teil
Programmteil A
Eingabe: 117.8 m_2
50. a
30. b

Ausgabe: 33376.66667 Id_2

Programmteil E'
Eingabe: 33376.66667
117.8
30. a
Ausgabe: 139396.6667 Id_{21}

3. Teil
Programmteil A
Eingabe: 157. m_3
50. a
40. b

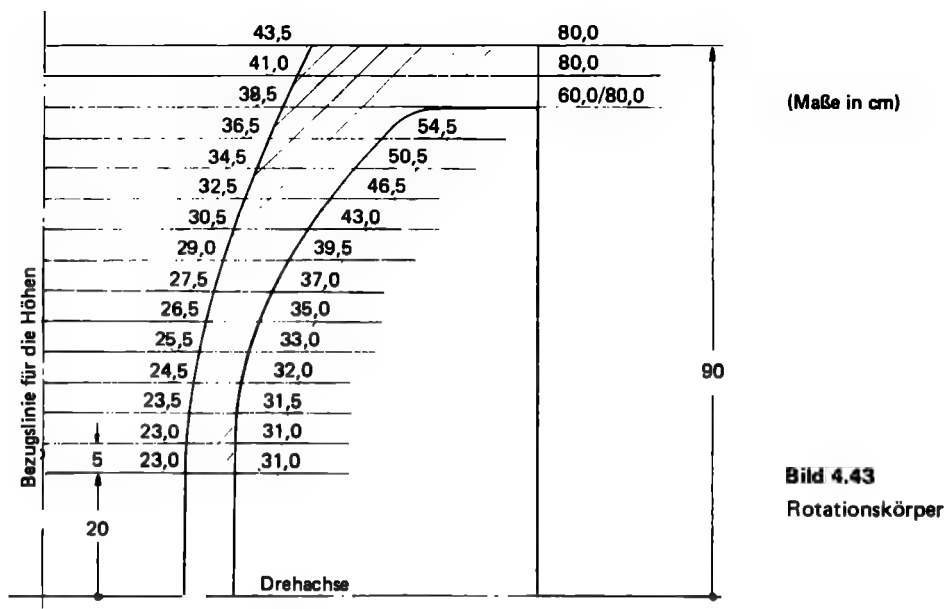
Ausgabe: 53641.66667 Id_3

Programmteil E'
Ausgabe: 53641.66667
157.
50. a
446141.6667 Id_{31}

Damit ergibt sich

$$Id = 129.44 \text{ kgm}^2$$

Das Massenträgheitsmoment des in Bild 4.43 dargestellten Körpers ist zu bestimmen (Dichte $7.85 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$).



Manuelle Be-
rechnung der
Höhendiffe-
renzen:

36,5 h_{90}
39, h_{85}
41,5 h_{80}

21,5 h_{80}
18, h_{75}
16, h_{70}
14, h_{65}
12,5 h_{60}
10,5 h_{55}
9,5 h_{50}
8,5 h_{45}
7,5 h_{40}
7,5 h_{35}
8, h_{30}
8, h_{25}
8, h_{20}

Anwendung von Programm 4.14:

Durch den Höhengsprung bei $r = 80$, ist eine Aufteilung der Berechnung notwendig.

Eingabe:	0.00785	δ	30.	50.	70.	
	20.	r_1	7.5	10.5	18.	
	80.	r_2	209250.	1250000.	5831000.	
	5.	Δr				
	8.	h_1	35.	55.	75.	
Ausgabe:			7.5	12.5	21.5	
Eingabe:	20.	r_i	321562.5	1913312.5	8332031.25	
Ausgabe:	8.	h_{i3}				
	64000.	$r_i h_m \Delta r$	40.	60.		End-
			8.5	14.		Ausgabe:
	25.		512000.	2862000.	6500687.24	Id_1
	8.					
	125000.		45.	65.		
			9.5	16.		
			820125.	4119375.		

Eingabe:	0.00785	δ
	80.	r_1
	90.	r_2
	5.	Δr
	41.5	h_1
	80.	r_i
	39.	h_i
	20608000.	$r_i^3 h_m \Delta r$
Ausgabe:	85.	
Eingabe:	36.5	
Ausgabe:	23183218.75	

Damit folgt

$$Id = Id_1 + Id_2 = 1730 \text{ kgm}^2.$$

	End-
	Ausgabe:
10799572.43	Id_2

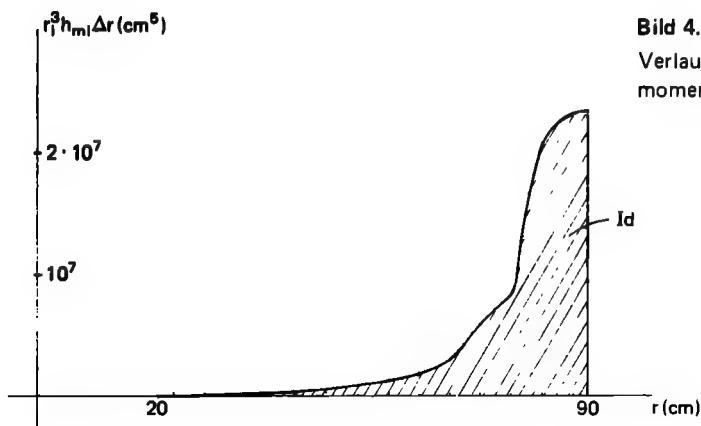


Bild 4.44

Verlauf des Massenträgheitsmoments über dem Radius

Welche Schwingbewegung vollführt ein nach Bild 4.45 aufgehängtes Pleuel mit $I_{d_s} = 35 \text{ kg cm}^2$ bei 30° Auslenkung.

Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Drehpunkt ergibt sich aus (4.2.12)

$$I_{d_D} = I_{d_s} + m a^2 = 194 \text{ kg cm}^2.$$

Damit ergibt sich wiederum nach (4.2.20)

$$l_{\text{red}} = \frac{I_{d_D}}{m l} = 17.2 \text{ cm}.$$

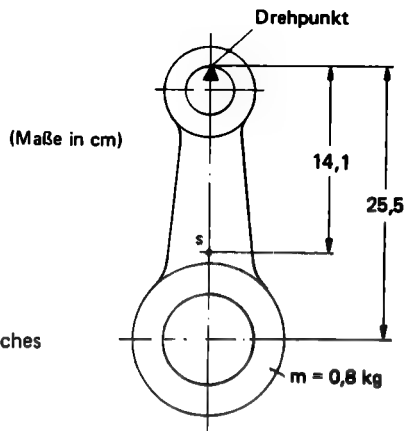
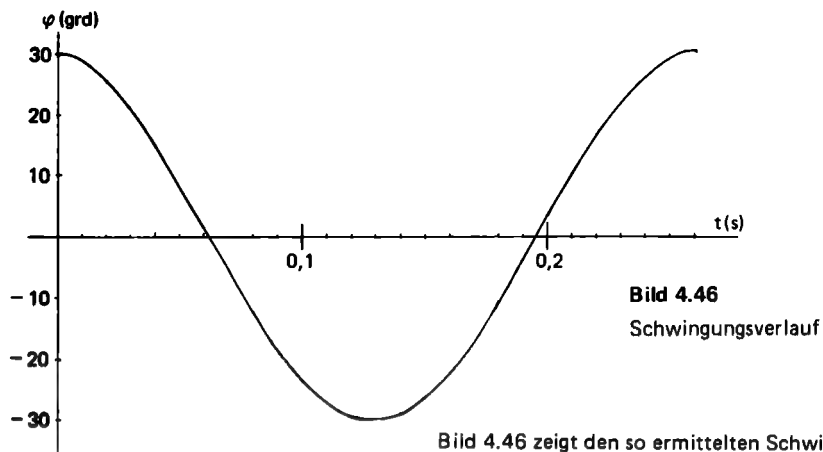


Bild 4.45
Physikalisches
Pendel

Mit Hilfe der zuvor ermittelten reduzierten Länge, läßt sich nun Programm 4.5 anwenden.

Eingabe:	0.8	m	-23.6985357	3.323910178
	0.0172	l	-8.757543618	12.44685031
	30.	φ_0	-1.1506297502	.2140858253
	0.	ω_0	8.489864866	9.962432152
	0.	t_0	0.1	0.2
	0.01	Δt		
	0.02	Δt_{prt}	-29.60306807	16.62561513
			-3.840180447	11.09969635
			-1.0660511037	.1909147773
			7.170316736	9.417638999
Ausgabe:	25.17957196	φ_1		
	-5.561489882	ω_1		
	-0.095657626	v_1	0.12	0.22
	7.331290331	s_1		
	0.02	t_1	-29.13176475	26.24813236
			1.845302682	7.326628141
			.0317392061	0.126018004
			6.830438058	8.01258562
	14.87599507		0.14	0.24
	-9.995057149			
	-0.171914983			
	8.720703196		-22.37821271	30.1690215
	0.04		7.165298597	2.039036031
			.1232431359	.0350714197
			7.730904387	6.921175837
	1.272285779		0.16	0.26
	-12.28365006			
	-0.211278781			
	9.841814317		-10.72212287	
	0.06		11.00699082	
			.1893202422	
			9.171007806	
			0.18	
	-12.61644772			
	-11.83012395			
	-0.203478132			
	9.733029322			
	0.08			

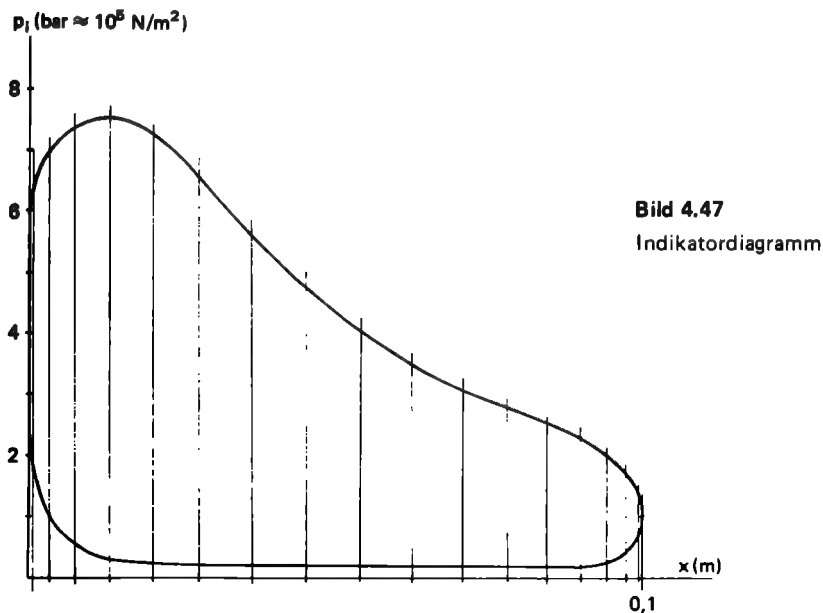


– 4 –

Bei einem Kolbenmotor mit den Daten

$$\begin{aligned} d_k &= 0.1 \text{ m} \\ l &= 0.3 \text{ m} \\ r &= 0.05 \text{ m} \\ m_0 &= 80 \text{ kg} \\ m_R &= 60 \text{ kg} \end{aligned}$$

wurde ein Indikatordiagramm, Bild 4.47, erstellt. Gesucht ist eine Analyse vorhandener Bewegungs- und Belastungsgrößen bei einem Ausgangswinkel $\varphi_0 = -90^\circ$ und schrittweises Vorgehen um 10° .



Eingabe:	0.1	d_k	-50.	0.	50.
	0.3	l	.0900287567	.0541960108	.0134243123
	0.05	r	20000.	20000.	20000.
	80.	m_0	157.0796327	157.0796327	157.0796327
	60.	m_R	-109.4504467	26.55130398	131.2095128
	-90.	v_0	6.040155812	2.97496801	6.613358017
	10.	$\Delta\varphi$	1.65558643	3.361380683	1.512091131
			.0026069282	.0025450892	.0045575651
Ausgabe:	-90.	φ_i	-1.0001870867	-1.0005856947	.0002104713
	0.1	x_i	-1.0149669362	-1.0468555728	.0168377008
	100000.	p_i	5.696728209	7.853981634	4.400155953
	785.3981634	F_i	5.341886161	29.95397108	39.16826522
	-785.3981634	F_{Ri}			
	16.18021594	ω_i	-40.	10.	60.
	.6180387232	Δt_i	.0845945271	.0453862068	.0077422112
	0.	v_i	20000.	20000.	55000.
	0.	a_i	157.0796327	157.0796327	431.9689899
	0.	F_{0i}	-85.47905726	53.01619078	392.1576497
	0.	Md_i	5.337885264	4.203815361	11.43325048
	.6180387232	l_i	1.873401077	2.378791441	.8746419067
			.0029007294	0.003703479	.0064964885
	-80.		-1.0001568277	-1.0004869657	-1.0022168197
	.0993660543		-1.0125462161	-1.0389572528	-1.1773455762
	70000.		6.666372604	7.507732718	9.235050295
	549.7787144		7.215287238	32.33276252	40.04290712
	-538.6622064				
	13.39977868	-30.	20.	70.	
	.7462809824	.0781414478	.0366010947	0.003503173	
	.0008494731	20000.	20000.	100000.	
	-1.0011382752	157.0796327	157.0796327	785.3981634	
	-1.0910620175	-58.69707918	77.13070799	753.3701526	
	5.557212734	4.423312453	5.070526205	15.84687301	
	1.364319706	2.26074918	1.972181899	0.631039322	
		.0028543986	.0044545141	.0067175501	
	-70.	.0000204936	-1.0003808143	-1.0003503135	
	0.097472435	.0016394847	-1.0304651477	-1.0280250805	
	45000.	7.374558098	6.954368587	11.32415617	
	353.4291735	9.476036418	34.30494442	40.67394645	
	-325.213004				
	10.41174023	-20.	30.	80.	
	0.960454235	0.070803109	.0281414478	0.000885279	
	.0019715872	20000.	20000.	190000.	
	-0.001168316	157.0796327	157.0796327	1492.25651	
	-1.0934652828	-30.31808897	98.3825535	1477.08843	
	6.992119383	3.178998216	5.726620688	22.18924988	
	2.324773941	3.145645049	1.746230551	.4506686821	
		.0023328566	.0048445189	.0058089102	
	-60.	.0001657981	-1.0002233409	.0020162038	
	.0943447516	.0132638485	-1.0178672744	.1612963018	
	25000.	7.806288583	6.228937134	10.82889923	
	196.3495408	12.62168147	36.05117498	41.12461513	
	-161.8339037				
	7.344701121	-10.	40.	90.	
	1.361525791	.0627510246	.0203157661	0.	
	0.00229719	20000.	20000.	600000.	
	-1.0002391455	157.0796327	157.0796327	4712.38898	
	-1.0191316399	-1.536993147	116.458626	4712.38898	
	5.619726908	.7157730429	6.230533042	39.63327298	
	3.686299731	13.97090893	1.604999112	.2523132522	
		.0005763465	.0048758168	.0035086506	
		.0001257263	-1.0000195003	.0091166818	
		.0100581006	-1.0015600241	.7293345417	
		7.961591292	5.36662537	0.	
		26.5925904	37.65617409	41.37692838	

100. 0.000885279 630000. 4948.008429 4897.714269 40.40509155 .2474935613 -.0035769781 .0286295475 2.290363803 -35.90635008 41.62442194	150. .0281414478 650000. 5105.088062 3197.432989 32.64676088 .3063091017 -.0255483159 -.0006991056 -.0559284453 -202.4404568 42.92292361	200. 0.070803109 305000. 2395.464398 -462.3508569 12.41438489 .8055171549 -.0099961676 .0092295308 .7383624642 -119.0459009 48.67803046	240. .0943447516 200000. 1570.796327 -1294.671229 20.77395187 .4813720596 -.0089660272 -0.00449755 -0.359803996 -44.95781527 50.7816968
110. 0.003503173 700000. 5497.787144 5273.591068 41.92688504 .2385104448 -.0109760137 .0310218517 2.481748136 -79.26909318 41.86293239	160. .0366010947 560000. 4398.229715 2159.659824 26.83070271 .3727073461 -0.022697827 -.0076480621 -.6118449641 -194.7223204 43.29563095	210. .0781414478 280000. 2199.114858 -821.7591085 16.55051971 .6042106334 -.0121453321 0.003556979 .2845583213 -103.2438134 49.28224109	250. 0.097472435 180000. 1413.716694 -1300.852016 20.82348047 .4802271175 -.0065129255 -.0051082115 -.4086569193 -27.96847753 51.26192392
120. .0077422112 .735000. 5772.676501 5240.652228 41.79574232 .2392588203 -.0177173751 .0281760205 2.254081636 -123.4138539 42.10219121	170. .0453862068 480000. 3769.911184 1272.388579 20.59440522 .4855687695 -.0180924159 -.0094845703 -.7587656242 -180.1855852 43.78119972	220. .0845945271 250000. 1963.495408 -1068.488216 18.87227434 .5298778421 -.0121784282 .0000624599 .0049967936 -83.32965755 49.81211894	260. .0993660543 135000. 1060.287521 -1038.848541 18.60867666 .5373837261 -.0035237749 -.0055624136 -.4449930859 -10.7174817 51.79930764
130. .0134243123 750000. 5890.486225 4920.356729 40.49838157 .2469234476 -.0230115899 .0214407129 1.715257031 -165.0058482 42.34911465	180. .0541960108 400000. 3141.592654 531.0260796 13.3044614 .7516275705 -.0117209698 -.0084768658 -.6781492678 -157.0796327 44.53282729	230. .0900287567 230000. 1806.415776 -1258.680137 20.48316493 .4882058037 -0.011131022 -.0021454194 -.1716335512 -65.51237441 50.30032474	270. 0.1 100000. 785.3981634 -785.3981634 16.18021594 .6180387232 -.0010257378 -.0040418781 -.3233502478 0. 52.41734637
140. .0203157661 720000. 5654.866776 4192.510535 37.38319825 0.267499852 -.0257624583 0.010283626 .8226900777 -193.1985133 42.61661451	190. .0627510246 350000. 2748.893572 -26.89738007 2.994293465 3.339686011 -.0025616222 -.0027425775 -.2194061978 -139.3278476 47.87251331		

Nach Abschluß der Berechnung
Auswertung durch Programnteil B

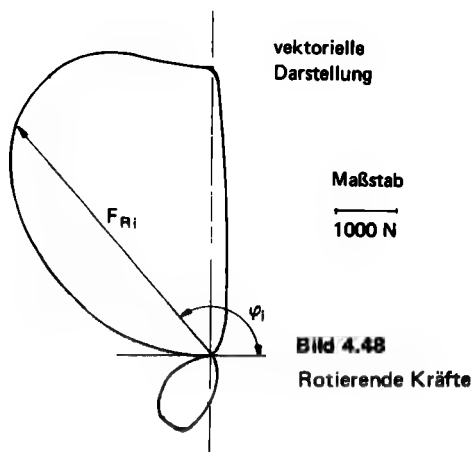
Ausgabe: 17.02815188 ω_m (s⁻¹)
-48.70136533 Md_m (Nm)

Eingabe: 0.2 δ

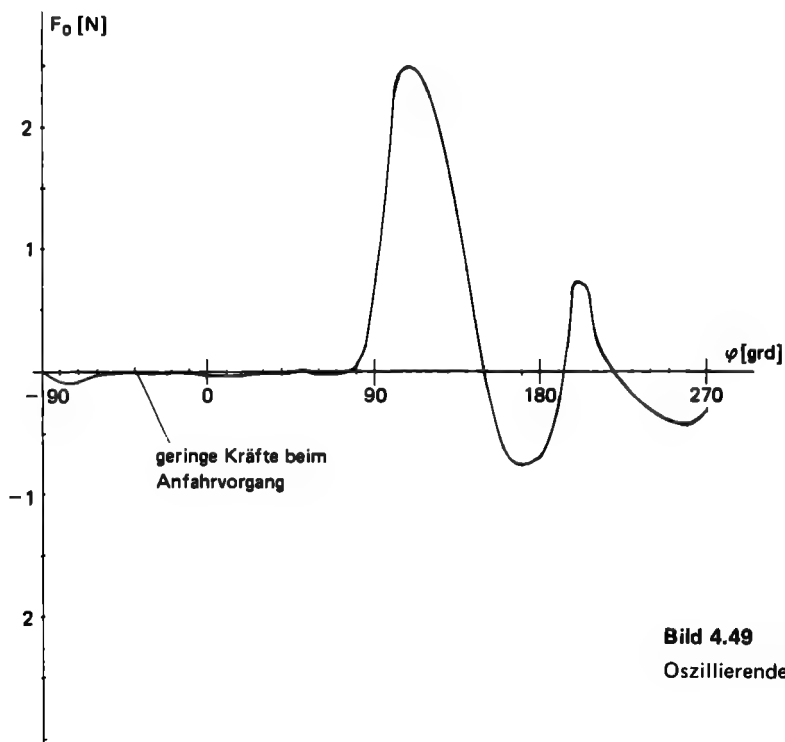
Ausgabe: 310.726172 I_d (kgm²)

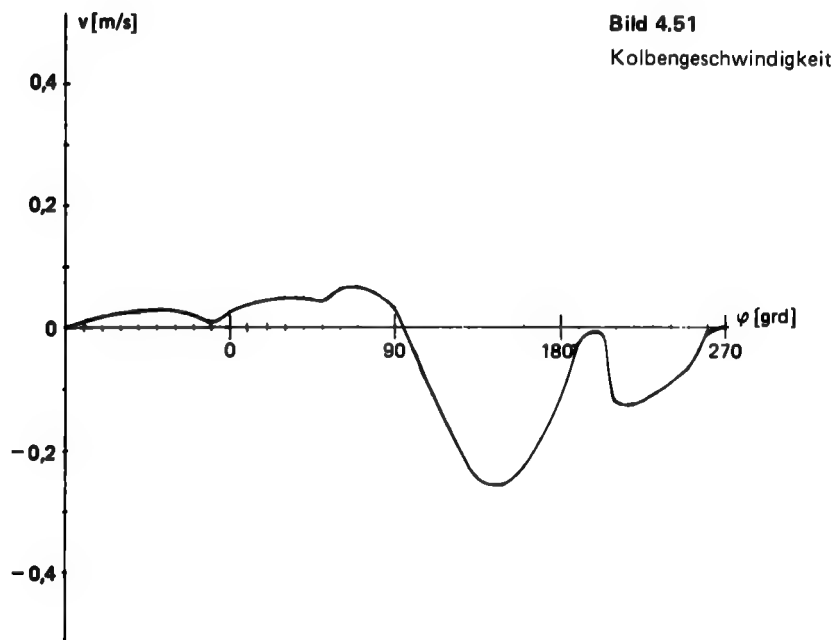
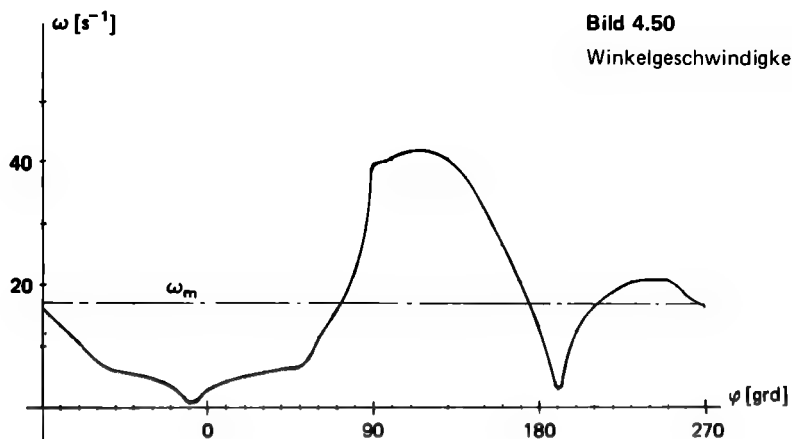
Eingabe: 7850. ρ
0.1 b
0.05 d

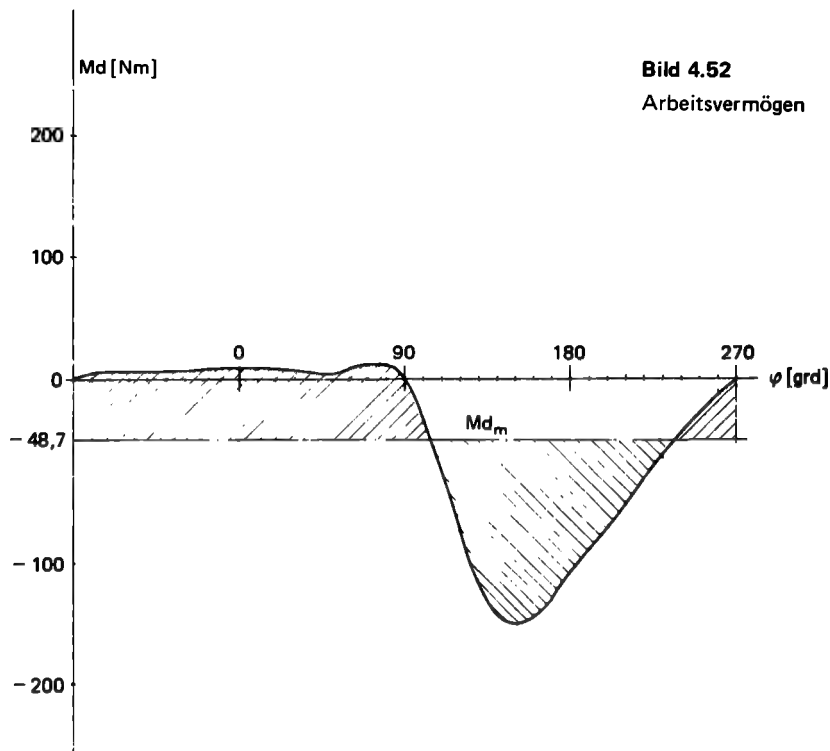
Ausgabe: 1.886533809 D (m)



Damit lassen sich die nachfolgenden Diagramme erstellen. (Ohne Einfluß eines Schwungrades.)







— 5 —

Zwei Massen, $m_1 = 40 \text{ kg}$ und $m_2 = 25 \text{ kg}$ aus Stahl, treffen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 5 \text{ m/s}$ bzw. $v_2 = -2 \text{ m/s}$ zentral aufeinander. Wie verhalten sich beide Massen nach dem Stoß und welche Umformarbeit wurde geleistet?

Den Sachverhalt gibt Bild 4.53 graphisch wieder.

Eingabe:

40.	m_1
5.	v_1
25.	m_2
-2.	v_2
0.625	k

Ausgabe:

2.307692308	u
0.625	c_1
5.	c_2
229.6875	$\Delta E \text{ [Nm]}$

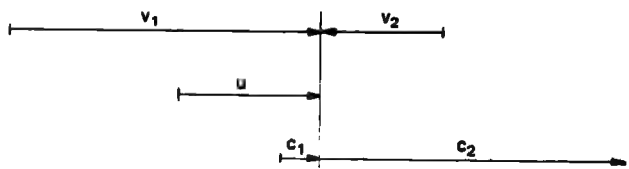


Bild 4.53
Geschwindigkeiten sich stoßender Massen

4.3 Mechanische Schwingungen

Unter einer mechanischen Schwingung versteht man die periodische Bewegung einer Masse um eine Mittellage. Den einfachsten Fall bildet ein Feder-Masse-System. Bei der Bewegung findet ein ständiger Energieumtausch zwischen potentieller und kinetischer Energie statt. Die potentielle Energiedifferenz wird auch als Federenergie bezeichnet. Die bei der Bewegung umgesetzte Wärmeenergie, durch innere Reibung in der Feder, soll unberücksichtigt bleiben. Wirken auf ein schwingendes System keine äußeren Kräfte, bezeichnet man den Bewegungsvorgang als freie Schwingung, Andernfalls als erzwungene Bewegung. Die bei der realen Schwingung stets auftretende Widerstandskraft, Bewegung im Medium und Reibungskraft (Stokes'sche Reibung, im Gegensatz zur Coulomb'schen oder Newton'schen Reibung), etc., soll in erster Näherung als geschwindigkeitsproportional angenommen werden. Dies entspricht auch unserer Annahme in 4.1.1. Nach der Schwingungsform unterscheidet man Längs-, Biegungs- und Torsionsschwingung.

4.3.1 Freie Schwingung

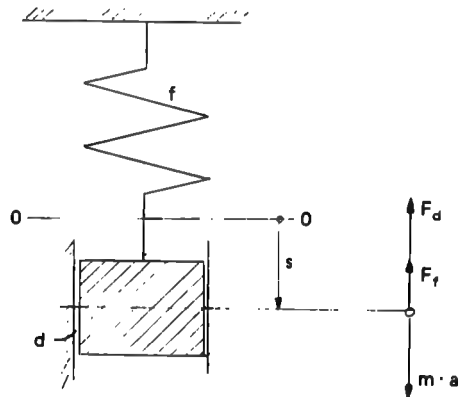
Wir betrachten den allgemeinsten Fall, eine freie gedämpfte Schwingung. Die zum Zeitpunkt t an der Masse angreifenden Kräfte zeigt Bild 4.54. Danach wirkt am Körper die Federkraft

$$F_f = f s \quad (4.3.1)$$

mit der Federkonstanten f
und die Dämpfungskraft

$$F_d = 2 m d \dot{s}, \quad (4.3.2)$$

Bild 4.54
Freie gedämpfte Schwingung



mit der Dämpfungskonstanten d , als Maß für die Dämpfungsintensität. Nach dem d'Alembertschen Prinzip folgt

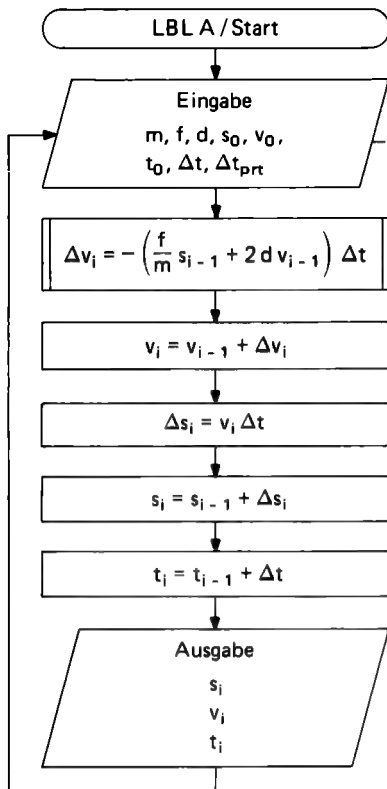
$$m \ddot{s} = -f s - 2 m d \dot{s} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m} s - 2 d v \quad (4.3.4)$$

und damit nach dem Euler-Cauchy-Verfahren

$$\Delta v = -\left(\frac{f}{m} s + 2 d v\right) \Delta t. \quad (4.3.5)$$

Wir erhalten den in Bild 4.55 dargestellten Berechnungsalgorithmus. Er ist in der Programmform als Rumpfprogramm aufgebaut, d. h. die entscheidende Berechnung der Geschwindigkeitsänderung geschied im Unterprogramm. Damit können auch nachfolgende Probleme in dieses Schema integriert werden. Setzt man $d = 0$, liegt der Fall einer freien ungedämpften Schwingung vor.



Zur Eingabe wird nach Aufruf des Programms A der Wert 8 eingegeben, da 8 Werte einzulesen sind. Siehe Tabelle 4.25

Bild 4.55

Flußdiagramm zur freien gedämpften Schwingung

Tabelle 4.25

Speicherplatzbelegung

00 Δt _{vorn}	05 s ₀ /s _i
01 Δt _{prt}	06 d
02 Δt	07 f
03 t ₀ /t _i	08 m
04 v ₀ /v _i	09 c = 0 für diesen Fall

Die Annahme einer linearen Federkennlinie ist nicht immer ausreichend genau. Daher soll nachfolgend noch ein Programmteil mit der Federkraft

$$F_f = f s (1 + c s^2) \quad (4.3.6)$$

aufgestellt werden. Der linearen Federkennlinie ist also eine kubische Parabel überlagert. Die Vergleiche werden im nachfolgenden Anwendungsbeispiel durchgeführt. Wir erhalten in ähnlicher Weise

$$\Delta v = - \left(\frac{f}{m} s + \frac{cf}{m} s^3 + 2 d v \right) \Delta t \quad (4.3.7)$$

und damit lediglich einen zusätzlichen Term. Unser Unterprogramm bekommt die in Tabelle 4.27 wiedergegebene Form.

Tabelle 4.26 Programm freie gedämpfte Schwingung

Start/Eingabe:			$\Delta s_j, s_j$:		Ausgabe:		
000	76	LBL	019	43	RCL	042	76 LBL
001	11	A	020	04	04	043	99 PRT
002	47	CMS	021	65	x	044	00 0
003	91	R/S	022	43	RCL	045	42 STD
004	42	STD	023	02	02	046	00 00
005	00	00	024	95	=	047	43 RCL
006	91	R/S	025	44	SUM	048	05 05
007	99	PRT	026	05	05	049	99 PRT
008	72	ST*				050	43 RCL
009	00	00	t_j :			051	04 04
010	97	DSZ	027	43	RCL	052	99 PRT
011	00	00	028	02	02	053	43 RCL
012	00	00	029	44	SUM	054	03 03
013	06	06	030	03	03	055	99 PRT
014	98	ADV	031	44	SUM	056	98 ADV
			032	00	00	057	61 GTD
						058	43 RCL
Berechnung:			Abfrage/Ausgabe:		SBR für		
015	76	LBL	033	43	RCL	$\Delta v_j, v_j$:	
016	43	RCL	034	01	01	240	76 LBL
Aufruf/Unterprogr.:			035	32	X:T	241	38 SIN
017	71	SBR	036	43	RCL	242	53 (
018	38	SIN	037	00	00	243	53 (
			038	77	GE	244	43 RCL
			039	99	PRT		
			040	61	GTD		
			041	43	RCL		
						245	07 07
						246	55 +
						247	43 RCL
						248	08 08
						249	65 x
						250	43 RCL
						251	05 05
						252	85 +
						253	02 2
						254	65 x
						255	43 RCL
						256	06 06
						257	65 x
						258	43 RCL
						259	04 04
						260	54)
						261	94 +/-
						262	65 x
						263	43 RCL
						264	02 02
						265	54)
						266	44 SUM
						267	04 04
						268	92 RTN

Tabelle 4.27 SBR für nichtlineare Federkennlinie

240	76	LBL	250	43	RCL	260	33 X²	270	94 +/-
241	38	SIN	251	05	05	261	85 +	271	65 x
242	53 (252	85 +		262	02 2	272	43 RCL
243	53 (253	24 CE		263	65 x	273	02 02
244	43 RCL		254	65 x		264	43 RCL	274	54)
245	07 07		255	43 RCL		265	06 06	275	44 SUM
246	55 +		256	09 09		266	65 x	276	04 04
247	43 RCL		257	65 x		267	43 RCL	277	92 RTN
248	08 08		258	43 RCL		268	04 04		
249	65 x		259	05 05		269	54)		

Wird die Dämpfungs- oder Reibungskraft, als Newton'sche Reibung mit

$$F_d = c \operatorname{sgn}(v) v^2, \quad (4.3.8)$$

also dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, angesetzt, ergibt sich die Differenzengleichung zu

$$\Delta v = - \left(\frac{f}{m} s + c \operatorname{sgn}(v) v^2 \right) \Delta t \quad (4.3.9)$$

und damit ein Unterprogramm nach Tabelle 4.28.

Tabelle 4.28 SBR für Newtonsche Reibung

240	76	LBL	248	08	08	256	43	RCL	264	54)
241	38	SIN	249	65	X	257	04	04	265	94	+/-
242	53	(250	43	RCL	258	69	DP	266	65	X
243	53	(251	05	05	259	10	10	267	43	RCL
244	43	RCL	252	85	+	260	65	X	268	02	02
245	07	07	253	43	RCL	261	43	RCL	269	54)
246	55	-	254	09	09	262	04	04	270	44	SUM
247	43	RCL	255	65	X	263	33	X ²	271	04	04
									272	92	RTN

4.3.2 Erzwungene Schwingung durch eine rotierende Masse

Zum Ansatz betrachten wir das idealisierte Schwingungssystem nach Bild 4.56. Die im Abstand r außerhalb des Drehpunktes rotierende Masse m_1 , hat in Schwingungsrichtung den Fliehkraftanteil

$$F_g = m_1 r \omega^2 \sin(\omega t). \quad (4.3.10)$$

Der Ansatz gestaltet sich wie zuvor

$$m \ddot{s} = -f s - 2m \dot{d} v - m_1 r \omega^2 \sin(\omega t), \quad (4.3.11)$$

wobei m die Masse m_1 beinhaltet. Es folgt wieder

$$\Delta v = - \left(\frac{f}{m} s + 2 \dot{d} v - \frac{m_1}{m} r \omega^2 \sin(\omega t) \right) \Delta t \quad (4.3.12)$$

als Bewegungsgleichung. Der nachfolgende Berechnungsalgorithmus in Bild 4.57, ist für konstante Winkelgeschwindigkeiten ausgelegt. Ansonsten muß der Algorithmus eine zusätzliche Gleichung $\omega = f(t)$ bestimmen.

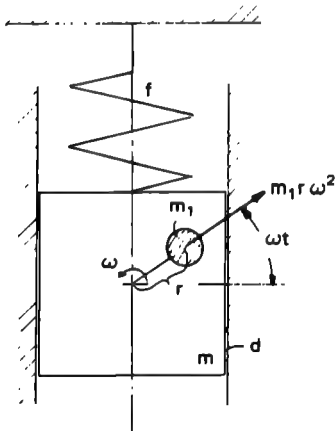


Bild 4.56
Erzwungene Schwingung
durch Rotor

Tabelle 4.29

Zusätzliche Speicherplatzbelegung

09 ω
10 r
11 m_1

Auch hier läßt sich wiederum der Programmrumpf von Tabelle 4.26 verwenden. Mit einer zusätzlichen Speicherbelegung zu Tabelle 4.25 folgt Tabelle 4.29. Bei Aufruf des Programms A, muß anschließend 11 eingegeben werden, da 11 Werte einzulesen sind. Tabelle 4.30 zeigt das entsprechende Unterprogramm.

Tabelle 4.30 SBR Erzwungene Schwingung durch Rotor

240	76	LBL	252	85	+	265	08	08	278	43	RCL
241	38	SIN	253	02	2	266	65	x	279	03	03
242	53	(254	65	x	267	43	RCL	280	54)
243	53	(255	43	RCL	268	10	10	281	38	SIN
244	43	RCL	256	06	06	269	65	x	282	54)
245	07	07	257	65	x	270	43	RCL	283	94	+/-
246	55	÷	258	43	RCL	271	09	09	284	65	x
247	43	RCL	259	04	04	272	33	x²	285	43	RCL
248	08	08	260	75	-	273	65	x	286	02	02
249	65	x	261	43	RCL	274	53	(287	54)
250	43	RCL	262	11	11	275	43	RCL	288	44	SUM
251	05	05	263	55	÷	276	09	09	289	04	04
			264	43	RCL	277	65	x	290	92	RTN

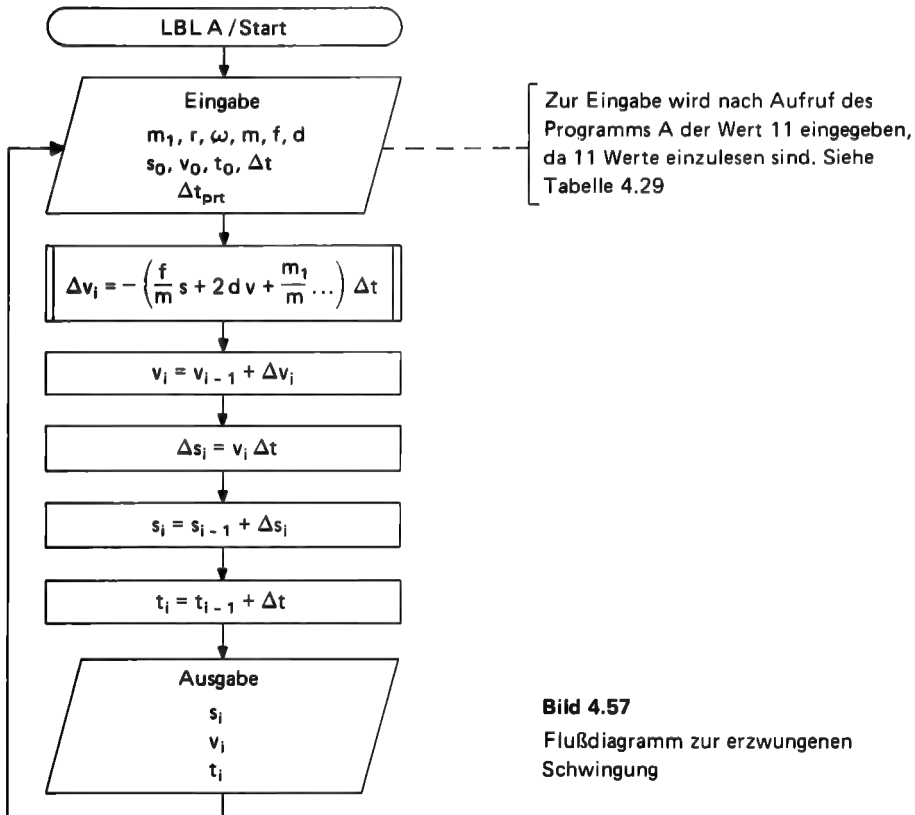


Bild 4.57

Flußdiagramm zur erzwungenen Schwingung

4.3.3 Erzwungene Schwingung durch rotierende und oszillierende Massen

Zum Ansatz betrachten wir wieder ein idealisiertes Schwingungssystem nach Bild 4.58. Der vorhandene Schubkurbeltrieb beinhaltet rotierende und oszillierende Massen. Sie werden als Massen-

kräfte 1. und 2. Ordnung bezeichnet. Ihr Anteil in Schwingungsebene beträgt für Massenkraft 1. Ordnung angenähert

$$F_I = m_1 r \omega^2 \cos \omega t \tag{4.3.13}$$

und für Massenkraft 2. Ordnung

$$F_{II} = m_1 r \omega^2 \cdot \frac{r}{l} \cos^2 \omega t. \tag{4.3.14}$$

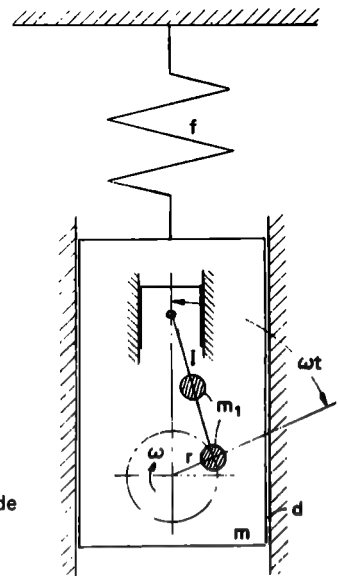
Die Differentialgleichung der Bewegung lautet

$$m s = - \left(f s + 2 m d v - m_1 r \omega^2 \left(\cos \omega t - \frac{r}{l} \cos^2 \omega t \right) \right).$$

Auch hier beinhaltet m wieder m₁. (4.3.15)

Bild 4.58

Erzwungene Schwingung durch rotierende und oszillierende Masse



Aus dieser leitet sich wieder die nachfolgende Geschwindigkeitsänderung ab

$$v = - \left(\frac{f}{m} s + 2 d v - \frac{m_1}{m} r \omega^2 \left(\cos \omega t - \frac{r}{l} \cos^2 \omega t \right) \right) \Delta t. \tag{4.3.16}$$

Beachten Sie bitte, daß im vorliegenden Fall der Winkel ωt anders als bei reiner Rotation gemessen wird. Mit zusätzlicher Speicherplatzbelegung nach Tabelle 4.31 folgt das Unterprogramm für diesen Fall nach Tabelle 4.32.

Tabelle 4.31 Zusätzliche Speicherplatzbelegung

09 ω	11 m_1
10 r	12 l

Tabelle 4.32 SBR erzwungene Schwingung durch rotierende und oszillierende Masse

240	76	LBL	257	65	x	274	53	(292	65	x
241	38	SIN	258	43	RCL	275	53	(293	43	RCL
242	53	(259	04	04	276	43	RCL	294	09	09
243	53	(260	75	-	277	09	09	295	65	x
244	43	RCL	261	43	RCL	278	65	x	296	43	RCL
245	07	07	262	11	11	279	43	RCL	297	03	03
246	55	+	263	55	+	280	03	03	298	54)
247	43	RCL	264	43	RCL	281	54)	299	39	CDS
248	08	08	265	08	08	282	39	CDS	300	54)
249	65	x	266	65	x	283	75	-	301	54)
250	43	RCL	267	43	RCL	284	43	RCL	302	94	+/-
251	05	05	268	10	10	285	10	10	303	65	x
252	85	+	269	65	x	286	55	+	304	43	RCL
253	02	2	270	43	RCL	287	43	RCL	305	02	02
254	65	x	271	09	09	288	12	12	306	54)
255	43	RCL	272	33	x²	289	65	x	307	44	SUM
256	06	06	273	65	x	290	53	(308	04	04
						291	02	2	309	92	RTN

4.3.4 Schwingung unter Berücksichtigung der Federmasse

Die Voraussetzung für die Betrachtung dieses Ansatzes besteht in der Annahme, daß jeder Teil der Feder einen gleichen Anteil an der gesamten Durchbiegung hat. Unter Betrachtung von Bild 4.59 ergeben sich für die Durchbiegung an der Stelle s folgende Verhältnisse

$$y = \frac{s}{l} x \quad (4.3.17)$$

und auch

$$\dot{y} = \frac{s}{l} \dot{x}. \quad (4.3.18)$$

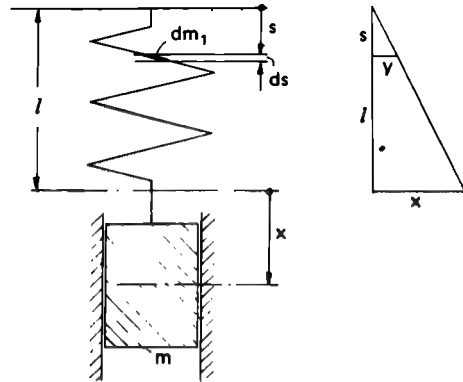


Bild 4.59
Schwingende Federmasse

Der Arbeitsanteil eines Massenelements dm_1 beträgt zu diesem Zeitpunkt

$$dW = \frac{dm_1}{2} \dot{y}^2. \quad (4.3.19)$$

Daraus folgt durch Integration

$$W = \frac{1}{2} \int dm_1 \dot{y}^2. \quad (4.3.20)$$

Mit

$$dm_1 = \frac{m_1}{l} ds \quad (4.3.21)$$

worin m_1 die Federmasse ist, gilt

$$W = \frac{1}{2} \frac{m_1}{l^3} \dot{x}^2 \int_0^l s^2 ds \quad (4.3.22)$$

$$W = \frac{m_1}{6} \dot{x}^2 = \left(\frac{m_1}{3} \right) \frac{\dot{x}^2}{2}. \quad (4.3.23)$$

Dies heißt aber, daß die Federmasse nominell zu einem Drittel am Schwingungsprozeß beteiligt ist. Gleichung (4.3.5) ergibt sich damit ergänzt

$$\Delta v = - \left(\frac{f}{m + \frac{m_1}{3}} s + 2dv \right) \Delta t. \quad (4.3.24)$$

Programmtechnisch ändert sich nichts, da statt der Masse m die ergänzte Masse

$$m' = m + \frac{m_1}{3} \quad \text{eingegeben wird.} \quad (4.3.25)$$

4.3.5 Biegeschwingungen

Wir betrachten ein Blattfederpendel nach Bild 4.60. Durch die Masse m wird eine statische Durchbiegung x erreicht. Nach Auslenkung aus seiner Lage, schwingt das System nach der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{s} + f_s = 0. \quad (4.3.26)$$

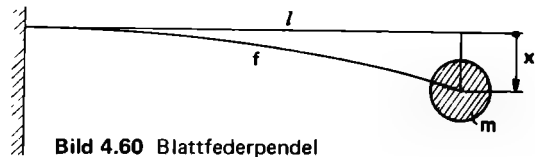


Bild 4.60 Blattfederpendel

Dies ist die allgemeine Differentialgleichung für freie Schwingung ohne Dämpfung. Die Federkonstante f ergibt sich aus der Überlegung, daß die Kraft, im Bereich des Hookeschen Gesetzes, am Stab proportional zur Durchbiegung ist. Mit Hilfe der statischen Auslenkung ergibt sich also

$$f = \frac{mg}{x}. \quad (4.3.27)$$

Im Fall des Blattfederpendels

$$f = \frac{3EI}{l^3} \quad (4.3.28)$$

mit E = E-Modul des Trägerwerkstoffs und I = axiales Flächenträgheitsmoment des Querschnitts.

Damit lässt sich dieses System als ein vorangegangenes allgemeines Schwingungssystem betrachten. So ergibt sich für einen Träger nach Bild 4.61

$$f = \frac{48EI}{l^3} \quad (4.3.29)$$

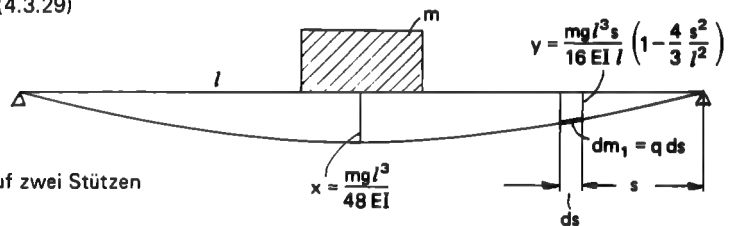


Bild 4.61

Schwingender Träger auf zwei Stützen

Berücksichtigt man die Federarbeit des Trägers, so ergibt sie sich aus der Entwicklung von x in y eingesetzt

$$y = 3 \frac{s}{l} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{s^2}{l^2} \right) x \quad (4.3.30)$$

$$\dot{y} = \frac{5}{3} (3l^2 - 4s^2) \dot{x} \quad (4.3.31)$$

$$dW = \frac{dm_1}{2} \dot{y}^2 = \frac{q \dot{x}^2}{2a|6} (9l^4 s^2 - 24l^2 s^4 + 16s^6) ds \quad (4.3.32)$$

$$W = \left(\frac{17}{35} m_1 \right) \frac{\dot{x}^2}{2} \quad (4.3.33)$$

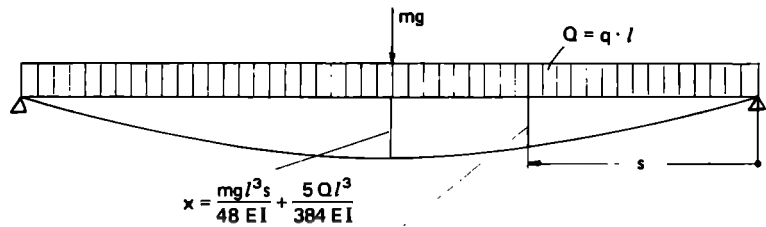


Bild 4.62

Schwingende Trägermasse

$$y = \frac{mg l^3 s}{16 EI} \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right) + \frac{5 Q l^3}{384 EI} \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{4s^2}{5l^2}\right)$$

Es müssen also $\frac{17}{35}$ -stel der Trägermasse für deren Federarbeit berücksichtigt werden. Weiterhin wollen wir die bisher vernachlässigte Trägermasse beachten. Nach Bild 4.62 folgt auf gleichem Wege

$$y = \frac{F l^3}{48 EI} \left(\frac{3s}{l} \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right) - \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{4s^2}{5l^2}\right) \right) + \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{4s^2}{5l^2}\right) x \quad (4.3.34)$$

$$\dot{y} = \left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{4s^2}{5l^2}\right) \dot{x} \quad (4.3.35)$$

$$dW = \frac{dm_1}{2} \dot{y}^2 \quad (4.3.36)$$

$$W = 2 \int_0^{l/2} dW = \left(\frac{3968}{7875} m_1 \right) \frac{\dot{x}^2}{2} \quad (4.3.37)$$

In diesem Fall müssen also $\frac{3968}{7875}$ -stel der Trägermasse eingesetzt werden. Ein Geringeres als zuvor.

Ein besonders wichtiger Hinweis zur kritischen Winkelgeschwindigkeit einer rotierenden elastischen Welle. Sie bestimmt sich, als statisches Träger-Masse-System aufgefaßt, aus der statischen Durchbiegung durch

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g}{x}} \quad (4.3.38)$$

Ein nachfolgendes Anwendungsbeispiel zeigt dies anschaulich.

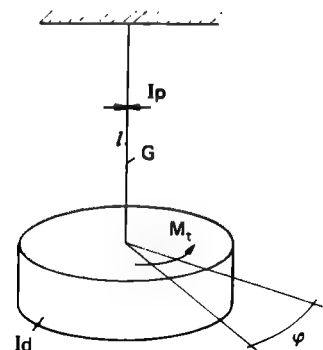
4.3.6 Drehschwingungen

Ein Torsionspendel nach Bild 4.63 erfährt bei Auslenkung um φ das rückstellende Moment

$$M_t = \frac{G I_p}{l} \varphi. \quad (4.3.39)$$

Bild 4.63

Torsionspendel



G ist der Gleitmodul des Fadens, I_p sein polares Flächenträgheitsmoment. Daraus folgt als Bewegungsgleichung für freie Drehschwingungen

$$I_d \cdot \ddot{\varphi} = - \frac{G I_p}{l} \varphi \quad (4.3.40)$$

$$\ddot{\varphi} = - \frac{G I_p}{I_d l} \varphi \quad (4.3.41)$$

$$d\omega = - \frac{G I_p}{I_d l} \varphi dt \quad (4.3.42)$$

und damit letztlich wieder

$$\Delta\omega = - \frac{G I_p}{I_d l} \varphi \Delta t. \quad (4.3.43)$$

Das Flußdiagramm folgt analog zu Bild 4.64. Mit der Speicherplatzbelegung nach Tabelle 4.33 läßt sich das Rechnerprogramm in 4.3.1 als Rumpfprogramm auch hier einsetzen und wir erhalten ein Unterprogramm nach Tabelle 4.34.

Tabelle 4.33

Speicherplatzbelegung

00 Δt_{vorh}	06 I_d
01 Δt_{prt}	07 l
02 Δt	08 I_p
03 t_0/t_i	09 G
04 ω_0/ω_i	10
05 φ_0/φ_i	11

Tabelle 4.34

SBR Drehschwingungen

240	76	LBL	252	43	RCL
241	38	SIN	253	06	06
242	53	(254	65	x
243	43	RCL	255	43	RCL
244	09	09	256	05	05
245	65	x	257	65	x
246	43	RCL	258	43	RCL
247	08	08	259	02	02
248	55	+	260	94	+/-
249	43	RCL	261	54)
250	07	07	262	44	SUM
251	55	+	263	04	04
			264	92	RTN

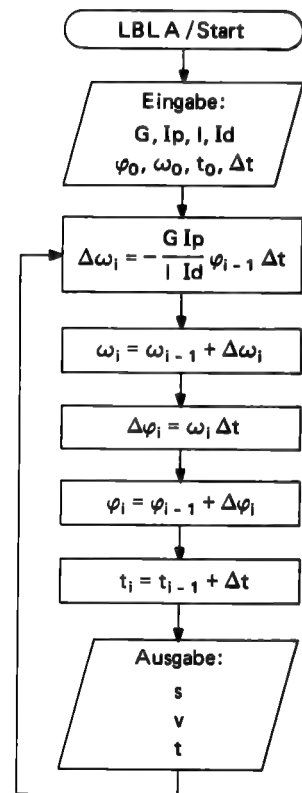


Bild 4.64

Flußdiagramm zur Drehschwingung

4.3.7 Anwendungsbeispiele

Alle Programme in diesem Buch sind für die Anwendung mit dem Drucker geschrieben. Wollen Sie diese ohne ihn benutzen, dann müssen Sie in den Programmen die Befehle Prt durch R/S ersetzen. Das Programm hält an und Sie können das Ergebnis notieren. Danach starten Sie wieder mit R/S.

– 1 –

Eine freie gedämpfte Schwingung hat folgende Daten:

$m = 50 \text{ kg}$
 $f = 80 \text{ kg/s}^2$
 $d = 2, 0.4 \text{ und } 0.04 \text{ s}^{-1}$
 $s_0 = -5 \text{ m}$
 $v_0 = 0$
 $t_0 = 0$
 $\Delta t = 0.1$
 $\Delta t_{\text{prt}} = 1$

} Berechnungsdaten

Eingabe:	50.	m	-1.451855677	- .2515043109
(d = 2)	80.	f	.6504745178	.1126817299
	2.	d	3.	7.
	-5.	s_0		
	0.	v_0		
	0.	t_0	-.9366536231	-.1622560522
	0.1	Δt	.4196498495	.0726957426
	1.	Δt_{prt}	4.	8.
Ausgabe:				
-3.484475459	s_i	-.6042748098	-.1046782315	
1.540157122	v_i	.2707338519	.0468990936	
1.	t_i	5.	9.	
-2.250407548		-.3898431988	-.0675323478	
1.008055577		.1746618413	.0302565858	
2.		6.	10.	

Achtung!
Nach Aufruf von A muß
zuerst 8, für die Anzahl
der Eingabewerte einge-
geben werden.

Eingabe:	50.	m	1.433773749	.1196017981
(d = 0.4)	80.	f	-0.985849354	.2804877562
	0.4	d	3.	7.
	-5.	s_0		
	0.	v_0		
	0.	t_0	.0846203907	.1837521113
	0.1	Δt	-1.268975052	-.0858713487
	1.	Δt_{prt}	4.	8.
Ausgabe:				
-1.969818686	s_i	-.5848154626	.0305613607	
4.235892561	v_i	-.1415993718	-.1604016932	
1.	t_i	5.	9.	
1.287383235		-.2993730536	-.0660960311	
1.902153264		.4876420538	-.0347278314	
2.		6.	10.	

Zuvor Eingabe von
8

Eingabe:	50. m	3.411305902	3.278576466
(d = 0.04)	80. f	-3.459065426	2.5115051
	0.04 d	3.	7.
	-5. s ₀		
	0. v ₀	-1.61376722	2.658688343
	0. t ₀	-5.066825621	-3.026104001
	0.1 Δt	4.	8.
	1. Δt _{prt}		
Ausgabe:			
-1.288171682	s _i	-4.006483679	-1.500730494
5.824853377	v _i	.2864578921	-4.053188372
	1. t _i	5.	9.
3.875008435		-0.843467657	-3.314183974
3.340653638		4.84005357	.4679742414
	2.	6.	10.

Zuvor Eingabe von
8

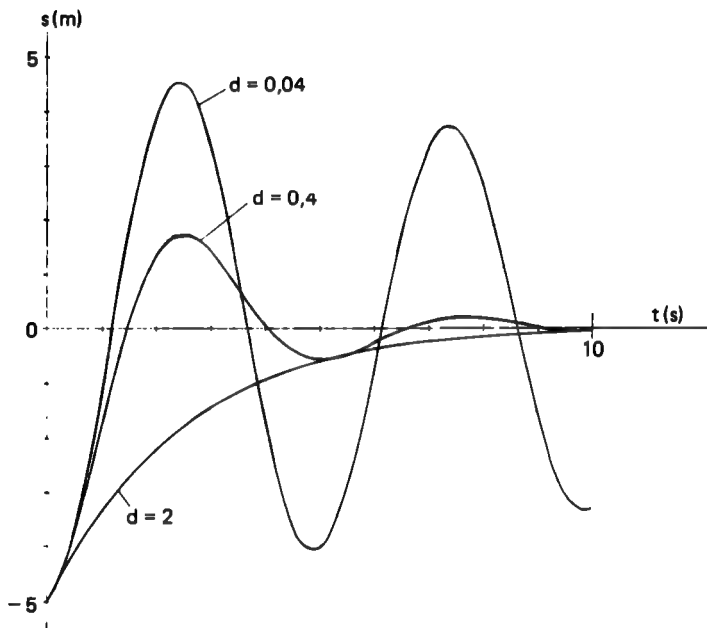


Bild 4.65
Schwingungsvorgang

Aus der allgemeinen Lösung lassen sich Gesetzmäßigkeiten für diesen Schwingungsvorgang gewinnen. So liegt für den Fall

$$d > \sqrt{\frac{f}{m}} \quad (4.3.44)$$

ein aperiodisches Schwingungsverhalten vor. In unserem Fall

$$\sqrt{\frac{80}{50}} = 1.265 \text{ s}^{-1}$$

gilt dies für $d = 2 \text{ s}^{-1}$.

Weiterhin liegen zwei Nulldurchgänge in derselben Richtung zeitlich um

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{f}{m} - d^2}} \quad (4.3.45)$$

auseinander. In unserem Fall mit $d = 0.4$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{80}{50} - 0.4^2}} = 4.85222 \text{ s}$$

Weiterhin beträgt das Verhältnis der beiden Höchstausschläge zu einer Seite

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{Td}. \quad (4.3.46)$$

In unserem Fall mit $d = 0.4$

$$e^{Td} = 6.96493.$$

Umgekehrt bezeichnet man die Größe

$$\ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = Td \quad (4.3.47)$$

als logarithmisches Dekrement der Schwingung. Mißt man praktisch eine Reihe von Höchstausschlägen und die Schwingdauer, so läßt sich daraus die Dämpfungskonstante d bestimmen. Mit Hilfe der Gleichung (4.3.45) für T folgt bei gegebener Masse auch die Federkonstante.

– 2 –

Das unter – 1 – angegebene Schwingungssystem ($d = 0.4 \text{ s}^{-1}$) wird auf unterschiedlichste Art erregt. Der Schwingungsverlauf ist aufzuzeichnen.

Die Art der Schwingungserregung wird durch die Größen s_0 und v_0 wiedergegeben.

1. Fall: Die Masse wird ausgelenkt und losgelassen (wie unter – 1 –)

$$s_0 = -5 \text{ m}; \quad v_0 = 0$$

2. Fall: Die Masse bekommt in der Ruhelage einen Stoß nach unten

$$s_0 = 0; \quad v_0 = -5 \text{ m/s}$$

3. Fall: Die Masse wird ausgelenkt und bekommt einen Stoß nach oben

$$s_0 = -5 \text{ m}; \quad v_0 = 5 \text{ m/s}$$

Diese drei Fälle mögen genügen. Den Schwingungsverlauf zeigt nachher Bild 4.66.

Deutlich sieht man in Bild 4.66 die Einflüsse auf den Schwingungsverlauf des Systems.

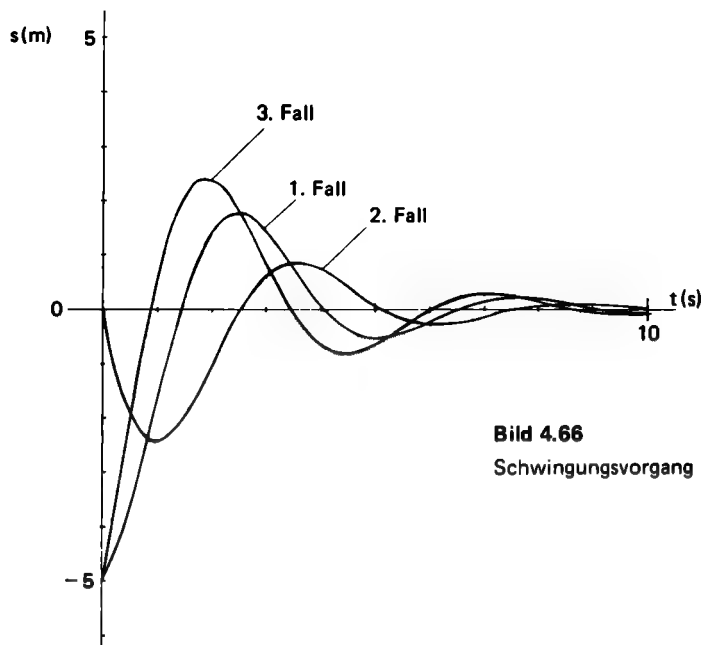


Bild 4.66
Schwingungsvorgang

Achtung!
Zuvor 8 (Eingabewerte)
angeben

Eingabe:	50. m	-1.093738127	.0814196386	.0493760255
	80. f	2.04824454	-.6414552113	.1494035718
	0.4 d	2.	5.	8.
	0. s ₀			
	-5. v ₀	.5668633786	-0.280094181	.0922309736
	0. t ₀	1.039434007	-.1043162321	-.0335993166
	0.1 Δt	3.	6.	9.
	1. Δt _{prt}			
Ausgabe:				
	-2.435638223 s _i	.7296606547	-.1612804596	.0199685031
	-.2754616611 v _i	-0.42296960	.2317969005	-.0799871637
	1. t _i	4.	7.	10.

Eingabe:	50. m	2.381121361	-.6662351014	.1343760858
	80. f	-.1460912767	.4998558395	-.2352749205
	0.4 d	2.	5.	8.
	-5. s ₀			
	5. v ₀	.8669103705	-.0189788726	-.0616696129
	0. t ₀	-2.025283362	.5919582859	-.1268023765
	0.1 Δt	3.	6.	9.
	1. Δt _{prt}			
Ausgabe:				
	0.465819537 s _i	-.6450402641	.2808822579	-.0860645342
	4.511354222 v _i	-.8460054217	.0486908556	.0452593323
	1. t _i	4.	7.	10.

In diesem Beispiel vergleichen wir das Schwingungsverhalten des Systems aus – 1 –, $d = 0.4 \text{ s}^{-1}$, bei unterschiedlicher Federrückholung, d.h. bei linearer und kubisch überlagerter Kennlinie. ($c = 0.1$).

Unter Benutzung des Unterprogramms für die kubische Federkennlinie ergab sich

Achtung!				
Zuvor 9 (Eingabewerte)				
eingeben				
Eingabe:	0.1 c	2.321375362	-.2226510932	-.0609699041
	50. m	-2.258942209	1.055075587	-0.258498205
	80. f	2.	5.	8.
	0.4 d			
	-5. s_0	-.4492932949	.4257560428	-.1498258106
	0. v_0	-2.184963992	.2442425942	.0376684749
	0. t_0	3.	6.	9.
	0.1 Δt			
	1. Δt_{prt}			
Ausgabe:		-1.182819418	.2820386282	-.0405605335
		.3917826238	-.3523466217	.1290821874
		4.	7.	10.
	1.167327916 s_i			
	5.480246322 v_i			
	1. t_i			

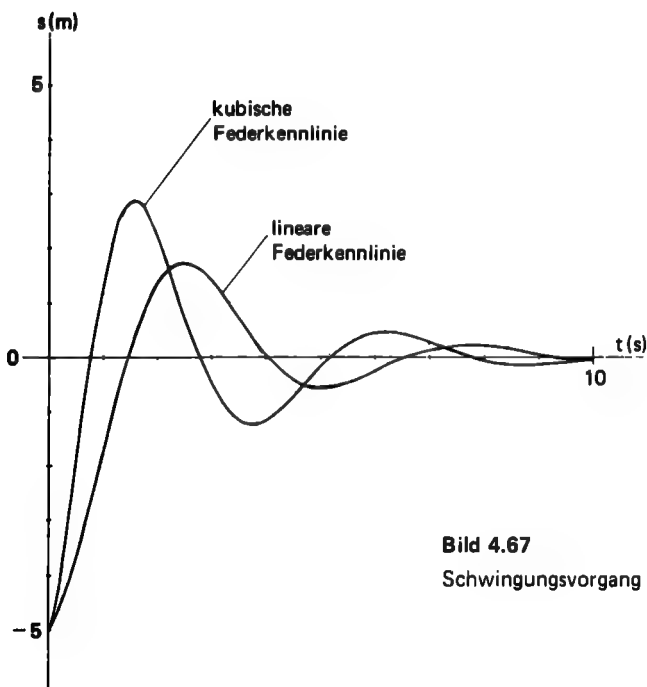


Bild 4.67
Schwingungsvorgang

In diesem Beispiel wollen wir abschließend das System aus – 1 –, $d = 0.4 \text{ s}^{-1}$, bei unterschiedlicher Dämpfung betrachten. Dazu benutzen wir das Unterprogramm Newtonsche Reibung mit $c = 0.1$

Achtung!
Zuvor 9 (Eingabewerte)
eingeben

Eingabe:	0.1	c	2.412596213	-2.089656852	1.25075166
	50.	m	2.410820064	-.0480808525	-1.20292091
	80.	f	2.	5.	8.
	0.4	d			
	-5.	s_0	2.313209234	-.6011920393	-.4837673469
	0.	v_0	-2.057828	2.313381331	-1.714245239
	0.	t_0	3.	6.	9.
	0.1	Δt			
	1.	Δt_{prt}			
Ausgabe:			-2.6348092725	1.369975842	-1.329294807
			-2.869405333	1.249461861	.0433976943
			4.	7.	10.
-1.553231173	s_i				
5.010958788	v_i				
1.	t_i				

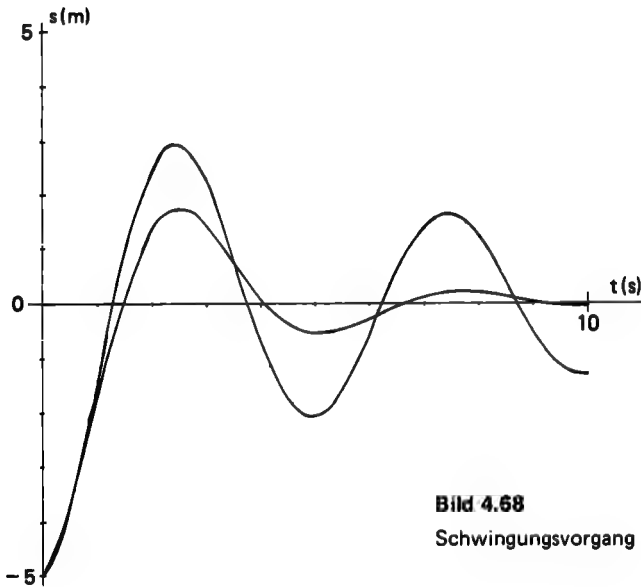


Bild 4.68
Schwingungsvorgang

Das Schwingungssystem von – 1 – wird durch eine außermittig rotierende Masse erregt. Die Daten sind

$m_1 = 20 \text{ kg}$
 $r = 0.05 \text{ m}$
 $\omega = 60 \text{ s}^{-1}$
 $m = 70 \text{ kg}$
 $f = 500 \text{ N/m}$ (also etwas steifer)
 $d = 0.4 \text{ s}^{-1}$
 $s_0 = -5 \text{ m}$
 $v_0 = 0$
 $t_0 = 0$

Der Bewegungsablauf ist gesucht.

Achtung! Zuvor 11 (Eingabewerte) eingeben					
Eingabe:	20.	m_1	7.716597281	-8.34237178	7.836052949
	0.05	r	-8.907782284	3.373398716	-2.456082717
	60.	ω	2.	5.	8.
	70.	m			
	500.	f	3.407646204	-5.100394254	5.265708015
	0.4	d	-7.542128409	8.024854124	-6.758101737
	-5.	s_0	2.5	5.5	8.5
	0.	v_0			
	0.	t_0			
	0.1	Δt	.5518105572	-1.7344548457	1.126078083
	0.5	Δt_{prt}	-4.947214131	8.764524917	-8.923787792
Ausgabe:			3.	6.	9.
	-0.0184183142	s_1			
	15.40259624	v_1	-2.229823683	3.281274573	-3.253555798
	0.5	t_1	-6.381683137	7.405492142	-8.296073639
			3.5	6.5	9.5
	8.03678397				
	13.89884859		-5.895427491	6.385439497	-6.603455134
	1.		-7.466955166	5.310953263	-5.519172868
			4.	7.	10.
	10.88307258				
	-0.1839381216		-8.648510118	8.127780572	
	1.5		-3.500465434	2.067755581	
			4.5	7.5	

Aus Platzgründen müssen wir hier theoretisch einige Besonderheiten dieses Schwingungsvorganges betrachten. Man erkennt, daß die gedämpfte Eigenschwingung des Systems langsam abklingt und die erzwungene Schwingung immer mehr angenommen wird. Um dies deutlicher zu demonstrieren, wurde die Masse zum Start ausgelenkt auf -5 m . Nach einer gewissen Zeit läuft die Bewegung nach dem Gesetz

$$s = A \sin(\omega t - \psi) \quad (4.3.48)$$

ab und damit mit derselben Frequenz wie die Erregerschwingung, nur um den Winkel ψ verschoben.

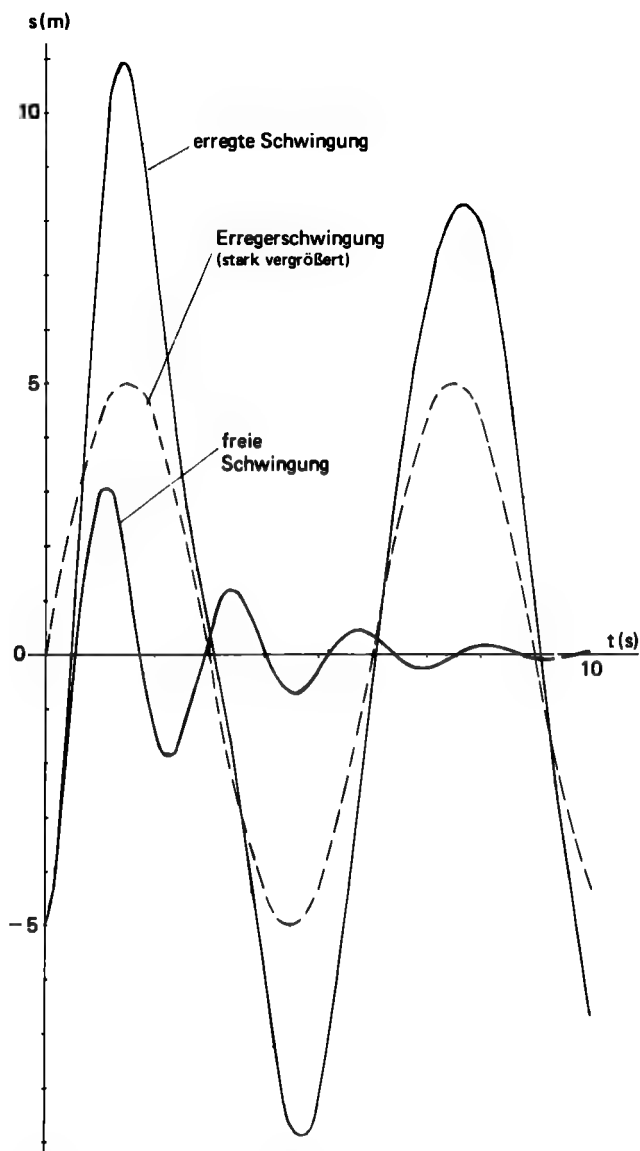


Bild 4.69
Schwingungsvorgang

Daher bezeichnet man ψ als Phasenwinkel. Er ergibt sich aus

$$\tan \psi = \frac{2 m d}{f - m \omega^2}. \quad (4.3.49)$$

Der Höchstausschlag A bestimmt sich durch

$$A = \frac{m_1 r \omega^2}{\sqrt{(f - m \omega^2)^2 + 4 m^2 d^2 \omega^2}}. \quad (4.3.50)$$

Bei Annäherung der Erregerfrequenz ω an die Eigenfrequenz des Schwingungssystems

$$\omega_k = \sqrt{\frac{f}{m}} \quad (4.3.51)$$

strebt A gegen ∞ . Dies veranschaulicht Bild 4.70. Daher bezeichnet man ω_k auch als kritische Winkelgeschwindigkeit. Der Vorgang selbst heißt Resonanz. Maschinenteile, die als elastische Bauteile gelten können, müssen auf diesen Resonanzfall hin untersucht werden. Er kann zur Zerstörung des Bauteils führen. Zur Vermeidung gestaltet man $\omega \gg \omega_k$. Umlaufende Wellen sind solche Teile. Hier stimmen kritische Winkelgeschwindigkeit und Eigenschwingungszahl überein. Mit der statischen Durchbiegung

$$y_0 = \frac{mg}{f}, \quad (4.3.52)$$

folgt

$$\omega_k = \sqrt{\frac{f}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y}}. \quad (4.3.53)$$

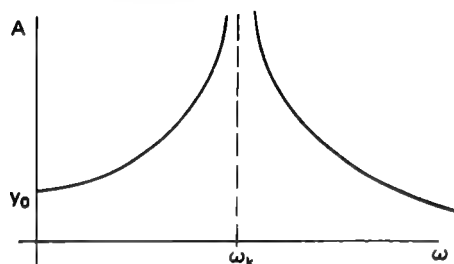


Bild 4.70 Schwingungsausschläge

— 6 —

Dieses Beispiel soll einen Vergleich zwischen einer Schwingung, angeregt durch einen rotierenden Erreger und einer Schwingung, angeregt durch einen rotierend-oszillierenden Erreger darstellen. Dazu benutzen wir das Schwingungssystem aus — 5 —. Zusätzlich wird die Schubstangenlänge $l = 0.3$ m angenommen.

Achtung!					
Zuvor 12 (Eingabewerte)					
eingeben					
Eingabe:	0.3	l	8.148487918	-6.98789366	9.184477334
	20.	m ₁	-4.018418821	8.8432576	2.257060809
	0.05	r	2.	5.	8.
	60.	ω			
	70.	m	5.799436941	-2.369067021	7.78055852
	500.	f	-5.137761671	8.485798253	-6.406105975
	0.4	d	2.5	5.5	8.5
	-5.	s ₀			
	0.	v ₀			
	0.	t ₀	2.311272375	.5363096864	2.324928475
	0.1	Δt	-8.640844241	4.005096384	-13.2227797
	0.5	Δt_{prt}	3.	6.	9.
Ausgabe:					
	- .3142700809	s _l	-3.243881186	1.871634716	-4.544801052
	14.03739354	v _l	-12.23339025	2.459980593	-13.00821416
	0.5	t _l	3.5	6.5	9.5
	6.673286165		-8.671037228	3.792855275	-9.13737234
	11.7667563		-8.741861797	5.057065121	-5.994379908
	1.		4.	7.	10.
	9.395443469		-10.15920698	6.942146828	
	1.282700042		1.224486043	6.554386408	
	1.5		4.5	7.5	

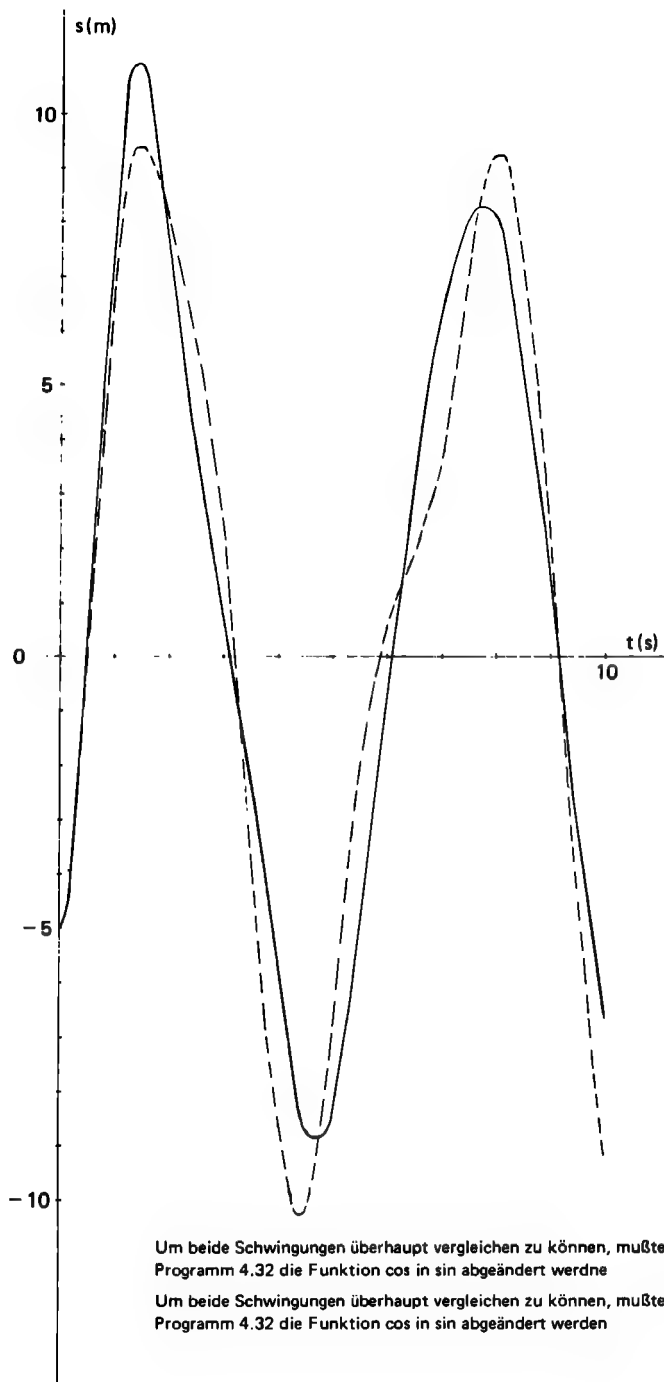


Bild 4.71
Schwingungsvorgang

Um beide Schwingungen überhaupt vergleichen zu können, mußte in Programm 4.32 die Funktion cos in sin abgeändert werden

Um beide Schwingungen überhaupt vergleichen zu können, mußte in Programm 4.32 die Funktion cos in sin abgeändert werden

Auf einem Träger auf zwei Stützen, Stützweite 3 m, wird mit einer neuen starren Stützvorrichtung, nach Bild 4.72, die Last von 1500 kg abgesetzt. Als Hauptträger werden 2 Doppel-T-Profile, für $\sigma_{bzul} = 8000 \text{ N/cm}^2$, verwendet. Gesucht ist die Eigenfrequenz des Systems und der Schwingungsverlauf.

Zunächst ergibt sich aus der zulässigen Biegespannung das notwendige Widerstandsmoment

$$W = \frac{Mb}{\sigma_{bzul}} = 69 \text{ cm}^3$$

Unter Berücksichtigung, daß hier zwei Träger nebeneinander liegen, ergibt sich aus einem der üblichen technischen Tabellenbücher der Träger

$$I_{120}, W_x = 54.7 \text{ cm}^3, I_x = 328 \text{ cm}^4, m = 33.3 \text{ kg}$$

Damit ergibt sich für den in Bild 4.72 dargestellten Belastungsfall

$$v_m = \frac{F l^3}{8 E I} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{4 a^2}{3 l^2} \right) = 0.413 \text{ cm}$$

Nach Gleichung (4.3.27) folgt

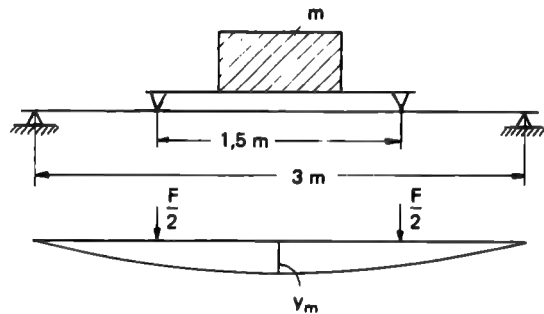
$$f = \frac{F}{v_m} = 35630 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Damit ergibt sich die Eigenfrequenz nach (4.3.51) zu

$$\omega_k = \sqrt{\frac{f}{m}} = 48.7 \text{ s}^{-1}$$

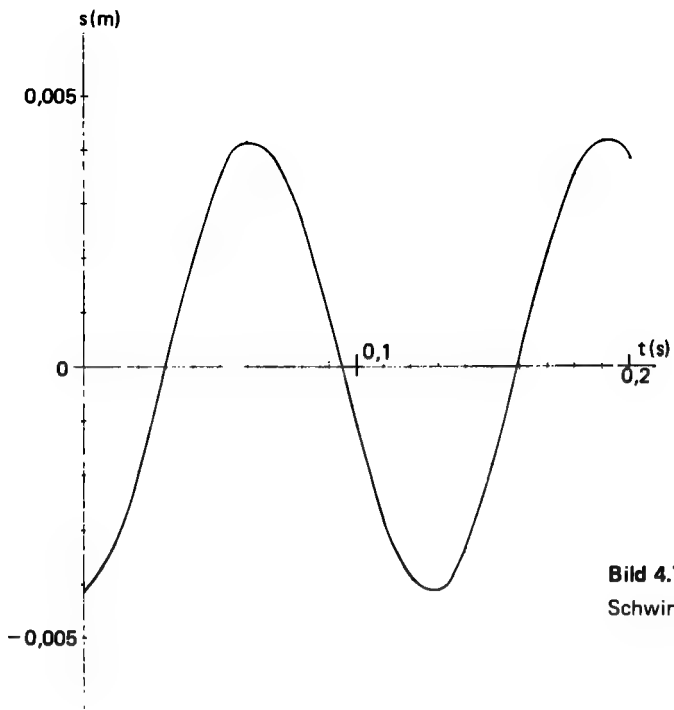
Den Bewegungsablauf zeigt Bild 4.73.

Bild 4.72
Schwingender Träger



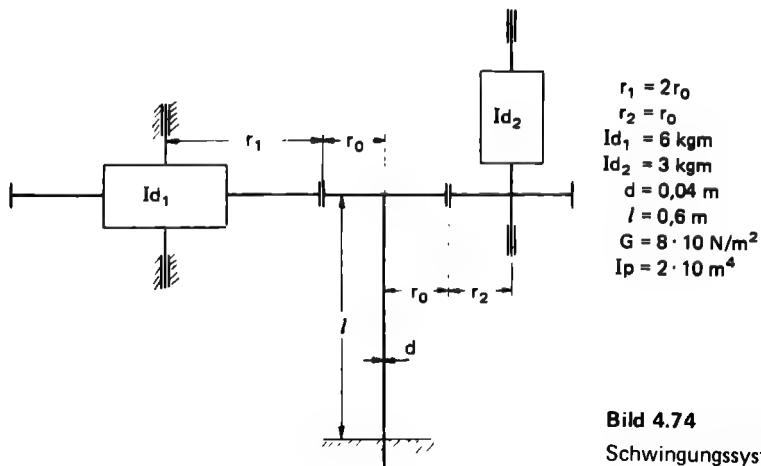
Achtung!
Zuvor 8 (Eingabewerte)
eingeben

Eingabe:	1516.78	m	.0019700334	-.0010921711	.0001579566
	3560000.	f	0.187793503	-.1994765197	.2008672386
	0.	d			
	-0.00413	s ₀	0.04	0.1	0.16
	0.	v ₀			
	0.	t ₀	.0041371776	-.0039308911	.0035217843
	0.005	Δt	.0454897741	-.0886324332	.1272019657
	0.02	Δt _{prt}	0.06	0.12	0.18
Ausgabe:					
	-.0019141438	s _i	.0026984586	-.0033435422	.0038161106
	.1664209916	v _i	-.1364617333	.0994615219	-.0573294403
	0.02	t _i	0.08	0.14	0.2



- 8 -

Gesucht ist das Schwingungsverhalten des in Bild 4.74 dargestellten Systems.



Zur Betrachtung werden die Massen der Drehwellen auf ein Ersatzsystem nach Bild 4.75 reduziert.
Nach Gleichung (4.2.23) folgt

$$Id_{10} = Id_1 \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 = \frac{1}{4} Id_1$$

$$Id_{20} = Id_2 \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 = Id_2$$

$$Id_0 = Id_{10} + Id_{20} = 4.5 \text{ kg m}$$

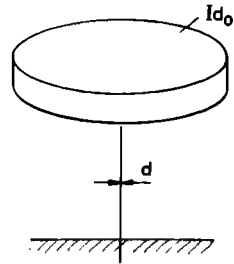


Bild 4.75
Ersatzsystem

Achtung!
Zuvor 9 (Eingabewerte)
eingeben

Eingabe:	8. 10	G	-4.030060757	-.3501562824	4.07526234
	2. -07	Ip	-13.50739405	-311.9694273	53.77944594
	0.6	I	0.04	0.1	0.16
	4.5	Id			
	4.	φ_0	.5246493021	-4.067726841	.0004524935
	0.	ω_0	313.1315119	-40.42206509	-307.9134381
	0.	t_0	0.06	0.12	0.18
	0.005	Δt			
	0.02	Δt_{prt}			
Ausgabe:			4.05265033	.1750141206	-4.075242858
		φ_i	26.98974723	310.2289938	-67.03712702
		ω_i	0.08	0.14	0.2
		t_i			

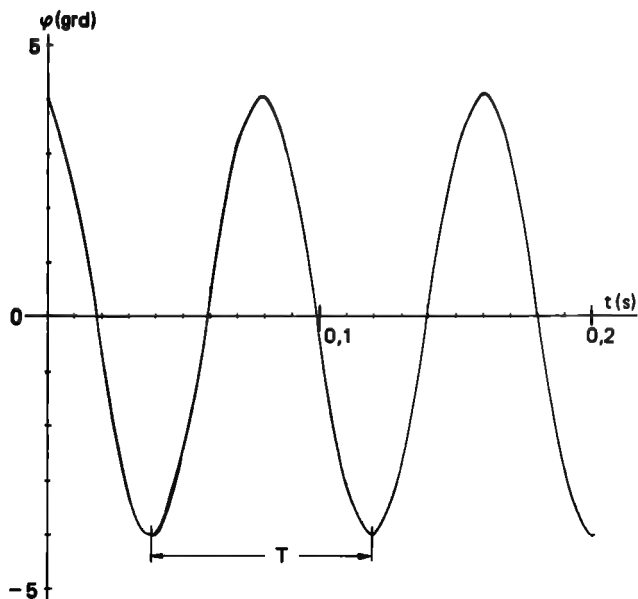


Bild 4.76
Schwingungsvorgang

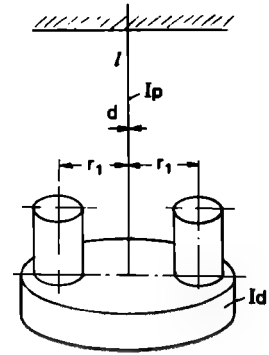
Eine Grenzwertbetrachtung liefert

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{Id}}}{G I_p}} \quad (4.3.54)$$

$$T = 0.0812 \text{ s}$$

Bild 4.77

Torsionspendel zur Feststellung eines I_{d}



Abschließend sei noch erwähnt, daß in der Praxis ein Torsionspendel mitunter zur Feststellung des Massenträgheitsmomentes eines beliebigen Körpers benutzt wird. Den Versuchsaufbau zeigt Bild 4.77. Der Vorteil liegt darin, daß lediglich die Massen m_1 , der Radius r_1 und die Schwingzeiten des Systems T und T_1 bekannt sein müssen. Die Zeit T ohne aufgesetzte Massen, beträgt nach Grenzwertbetrachtungen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{Id}}}{G I_p}}. \quad (4.3.54)$$

Mit aufgesetzten Massen beträgt sie, unter Berücksichtigung des Steinerschen Satzes

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{Id}} + 2m_1 r_1^2}{G I_p}}. \quad (4.3.55)$$

Daraus folgt durch Gleichsetzung und Umstellung

$$I_{\text{d}} = \frac{2m_1 r_1^2}{\left(\frac{T_1}{T}\right)^2 - 1}. \quad (4.3.56)$$

Wenn Sie eines der üblichen Stopuhrprogramme für Taschenrechner benutzen und dieses mit Gleichung (4.3.57) verbinden, können Sie Ihren Taschenrechner zur Bestimmung eines I_{d} benutzen.

- [1] *Hans Heinrich Gloistehn*: Programmieren von Taschenrechnern 3, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1977/78
- [2] *Helmut Alt*: Anwendung programmierbarer Taschenrechner, Band 1, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1979
- [3] *Eduard Pestel*: Technische Mechanik, BI-Hochschultaschenbuch, 1969
- [4] *K. Magnus/H. H. Müller*: Grundlagen der technischen Mechanik, Teubner Verlag, Stuttgart, 1974
- [5] *Hans Ziegler*: Vorlesungen über Mechanik, Birkhäuser Verlag, Basel, 1970
- [6] *K. A. Reckling*: Mechanik, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1968
- [7] *István Szabo*: Repertorium und Übungsbuch der technischen Mechanik, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1972
- [8] *István Szabo*: Einführung in die technische Mechanik, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966
- [9] *István Szabo*: Höhere Technische Mechanik, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1972
- [10] *H. Nahrstedt*: Algebraische oder Umgekehrt Polnische Notation – Arbeitsweise eines Taschenrechners, Deutsche Verlagsanstalt, Bild der Wissenschaft, Math. Kabinett Heft 6 + 7/79
- [11] *K. Zirpke/K. Kummer*: Technische Mechanik, Technik Tabellen Verlag, Darmstadt, 1969
- [12] *J. Kožesník*: Maschinendynamik, Carl Hanser Verlag, München, 1966
- [13] *H. Neuber*: Technische Mechanik, Teil 1–3, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1974
- [14] *G. Jordan-Engeln/F. Reutter*: Numerische Mathematik für Ingenieure, BI-Hochschultaschenbuch, 1973
- [15] *D. Rüdiger/A. Kneschke*: Technische Mechanik, Band 1–3, Verlag Harri Deutsch, Zürich-Frankfurt/M., 1966

Sachwortverzeichnis

- Akkumulator 4
- Algebraische Notation 4
- Algorithmus 1
- Anwendungsbeispiele 23, 40, 53, 62, 82, 113, 133
- AOS-Technik 4
- Aperiodisches Schwingen 134
- Arbeitsspeichereinheit 5
- Axiale Massenträgheitsmomente 94

- Bahnkrümmung 57
- Balkenneigung 20, 28
- Ballistische Kurve 66, 82
- Bewegung 56
 - des Massenpunktes 66
- Bewegungsdiagramme 5
- Biegeschwingungen 130
- Biegeträger 19
- Blattfederpendel 130
- Bogendifferential 57

- Cosinussatz 75
- Cremonaplan-Verfahren 17

- Dämpfung 123, 134, 138
- Deviationsmomente 102
- Differentialquotient 55
- Differenzenquotient 55
- Dokumentation 6
- Drehschwingungen 131, 144
- Drehstoß 112
- Dsz 4
- Dyname 9, 24
- Dynamische Speicherverwaltung 4

- Eigenfrequenz 141
- Einseitig eingespannter Träger 20
- Elastische Linie 20
- Ellipsenbahn 76
- Erzwungene Schwingung 126 f.
- Euler Cauchy-Verfahren 55
- Exakte Lösung 34
- Exzentrischer Stoß 112
- Eytelweinsche Gleichung 52

- Fachwerke 16
- Fadenpendel 71, 87
- Federmasse 129
- Flußdiagramm 1 f.
- Freie Schwingungen 123, 133
- Freier Fall 83

- Gerader Stoß 107
- Geschwindigkeitspol 57
- Gewindereibung 50, 54
- Gleichgewicht 7, 11, 16, 71
- Gleitmodul 132
- Goniometrische Gleichung 36
- Gravitation 73 f., 78
- Gravitationsfeld 75

- Hodograph 57
- Horizontalzug 31
- Hyperbelbahn 76

- Impuls 78
- Indikatordiagramm 106

- Keil 49, 53
- Keplergesetze 75, 88 f.
- Kinematik 55
- Kinetik des Massenpunktes 66
 - starrer Körper 92
- Knotenpunktverfahren 16
- Kolbenmotor 117
- Kosmische Geschwindigkeit 5
- Kräftegruppe 7
- Kraft 7, 14, 24
- Kreisbahn 76
- Krümmungsradius 57
- Kurbeltrieb 104

- Labels 1
- Leitung 40
- Lineares Gleichungssystem 14, 17
- Lösung 34
- Logarithmisches Dekrement 135

- Marken 1
- Massenausgleich 104
- Massenkräfte 104, 120
- Massenpunkt 56, 62, 66
- Massenträgheitsmoment 93, 113
- Mathematisches Pendel 71
- Mechanische Schwingungen 123
- Mediumdichte 66
- Moment 7, 24, 28
- Momentanbeschleunigung 57 f.
- Momentangeschwindigkeit 56
- Momentenvektor 9

Normalkomponente 57, 71
 Normalkraft 49
 Numerische Behandlung von Differential-
 gleichungen 55
 – Lösung 55
 Nutzlast/Brennstoff-Quotient 78

 Optimierung 5
 Ortsvektor 9, 56
 Oszillierende Masse 105, 127

 Parabelbahn 76
 Phasenwinkel 140
 Physikalisches Pendel 99, 116
 Planetenbewegung 73, 88
 Problemanalyse 1
 Programm 1
 Programmdokumentation 6
 Programmentwicklung 1
 Programmiergrundlagen 5
 Punktlast 20, 28

 Raketenbewegung 78
 Reduktion einer räumlichen Kräftegruppe 7
 Reduzierte Masse 100
 Reibung 49
 Resonanz 141
 Richtung eines Vektors 9
 Richtungswinkel 9, 14, 24
 Rotation 50
 Rotationssymmetrische Körper 95, 114
 Rotierende Masse 105, 127

 Satellitenbahn 76, 88
 Satz von Steiner 95
 Schiefe Ebene 49, 53
 Schiefer Stoß 112
 – Wurf 66
 Schmiegungeebene 5
 Schraubenlinie 62
 Schwingende Träger 130, 143

 Schwingungen 123, 126 f., 129, 137
 Schwungmoment 100
 Seil unter Eigenlast 30
 – unter Einzellast 37
 Seilbahn 43
 Seilelement 30
 Seilkraft 52
 Seilkurve 45, 49
 Seilkurve als Variationsproblem 31
 Seilreibung 52
 Seiltheorie 30
 Sinkgeschwindigkeit 85
 Sinussatz 75
 Solid-State-Software 14, 17
 Speichereinheit 5
 Statik starrer Körper 7
 Stoß fester Körper 107, 122
 Stoßzahl 111
 Streckenlast 20, 28
 Struktur eines Computers 4
 Strukturierte Programmierung 5
 Stützkkräfte in Tragwerken 1

 Tangentialkomponente 57, 71
 Torsionspendel 131, 145 f.
 Trägheitsradius 100
 Tragwerke 16, 26
 Translation 50
 Triebwerk 105

 Umschlingungswinkel 52

 Variationsproblem 31

 Widerstandsbeiwert 66

 Zentralkraft 73
 Zerlegung einer Kraft 14
 Zuweisungszeichen 4

Taschenrechner-Literatur

Peter Kahlig

Mathematische Routinen der Physik, Chemie und Technik für AOS-Rechner

Teil I. Mit 71 Abb., 129 Beispielen und 34 Tabellen. 1979. VI, 178 S. DIN C 5 (Anwendung programmierbarer Taschenrechner, Bd. 3/I), Kart.

Inhalt: Gamma- und Beta-Funktion, Kombinationen (Binomialkoeffizienten), Variationen (permutations, factorial powers) und ihre Logarithmen – Digamma-Funktion und ihre ersten sechs Ableitungen (Polygamma-Funktionen), Beta-Funktion und ihre ersten sechs Ableitungen – Exponentialintegrale, Integrallogarithmus, Integralsinus und -cosinus, hyperbolischer Integral-sinus und -cosinus.

Dieser Band enthält 13 ausgefeilte AOS-Programme für 30 oft benötigte Funktionen aus den Bereichen der Physik, Chemie und Technik. Zur Auflockerung und zur zusätzlichen Information dienen 71 Abbildungen, die fast alle vom Rechner selbst gezeichnet wurden, ferner 129 Beispiele und 34 Tabellen. Der Tuning Kit im Anhang enthält 8 komfortable, universell verwendbare Sonderprogramme zum Zeichnen und Drucken.

Teil II. Mit 137 Beispielen, 71 Abb., 16 Tab. und einem Anhang: Logarithmisches Plotten und Erzeugung von Fehlerkurven. 1980. VIII, 180 S. DIN C 5. Kart.

Inhalt: zeta-, xi- und Xi-Funktion von Riemann – eta-, kappa- und rho-Funktion, L-Funktion von Dirichlet – Polylogarithmen, chi-Funktionen von Legendre – Arcustangens-Integrale – Clausen-Integrale und Glaisher-Funktionen – Anhang: Arithmetische Funktionen – Logarithmisches Plotten von Kurven – Plotten der Ordinatenachse mit logarithmischer Teilung und mit inverser logarithmischer Teilung – Erzeugung von Referenzwerten und Fehlerkurven – Fehlerkurven zu Funktionsroutinen dieses Bandes.

14 ausgefeilte AOS-Programme für 21 oft benötigte spezielle Funktionen. Zur Veranschaulichung und zusätzlichen Information dienen 71 Abbildungen, die fast alle vom Rechner selbst gezeichnet wurden, ferner 137 Beispiele und 16 Tabellen.

Hans-Joachim Ludwig

Programmoptimierung für Taschenrechner (AOS)

2., durchges. Aufl. 1980. X, 102 S. 12 X 19,5 cm (Programmieren von Taschenrechnern, Bd. 5), Kart.

Inhalt: Wozu dient Programmoptimierung? – Techniken der Programmoptimierung – Rationalisierung der Programmherstellung – Steigerung der Effektivität – Erhöhung der Betriebssicherheit – Verbesserung des Bedienungskomforts – Förderung der Flexibilität – Verringerung des Programmspeicherbedarfs – Verringerung des Datenregisterbedarfs – Verkürzung der Rechenzeit – Programmbeispiele.

Ziel des Buches ist es, dem Benutzer von Taschenrechnern das geschickte Ausnutzen des Gerätes bis an die Grenzen seiner Möglichkeiten zu zeigen und dadurch die Leistungsfähigkeit eines Programms wesentlich zu erhöhen. Diese Anleitung zur optimalen Programmierung setzt keine speziellen Kenntnisse voraus.

Lehr- und Lernsystem Mechanik und Festigkeitslehre von Alfred Böge



Mit dem **Lehr- und Lernsystem Mechanik und Festigkeitslehre** liegt ein nach modernen didaktischen und methodischen Erkenntnissen gestaltetes Lehrwerk vor, das allen Ansprüchen, die heute von Dozenten und Studierenden gestellt werden, in jeder Beziehung gerecht wird.

Alfred Böge

Mechanik und Festigkeitslehre

Unter Mitarbeit von Walter Schlemmer und Wolfgang Weißbach. Mit 605 Abb., 26 Arbeitsplänen, 20 Lehrbeispielen und 16 Tafeln. 17., überarb. Auflage 1979. XIV, 381 S. DIN C 5 (Viewegs Fachbücher der Technik). Gbd.

Alfred Böge und Walter Schlemmer

Aufgabensammlung zur Mechanik und Festigkeitslehre

Unter Mitarbeit von Wolfgang Weißbach. Mit 516 Abb. und 907 Aufgaben. 7., überarb. Auflage 1979. XII, 211 S. DIN C 5 (Viewegs Fachbücher der Technik). Kart.

Alfred Böge

Formeln und Tabellen zur Mechanik und Festigkeitslehre

Unter Mitarbeit von Walter Schlemmer. 9., überarb. und erg. Auflage 1980. V, 49 S. DIN C 5 (Viewegs Fachbücher der Technik). Kart.

Alfred Böge und Walter Schlemmer

Lösungen zur Aufgabensammlung Mechanik und Festigkeitslehre

Unter Mitarbeit von Wolfgang Weißbach. Mit 738 Abb. 2., überarb. Auflage 1979. 176 S. DIN C 5 (Viewegs Fachbücher der Technik). Kart.

Anwendung programmierbarer Taschenrechner

Diese Reihe bietet den Benutzern programmierbarer Taschenrechner eine reichhaltige Palette von Aufgabenstellungen aus den Anwendungsgebieten der Natur- und Wirtschaftswissenschaften an, für die Programme zur numerischen Lösung entwickelt werden.

Jeder Band behandelt ein in sich abgeschlossenes Themengebiet: Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der jeweiligen Problemstellung wird der Lösungsalgorithmus entwickelt, das Programm dargestellt und kommentiert.

Neben der direkten Nutzung der hier veröffentlichten Programme unterstützt diese Reihe den Leser wirkungsvoll bei der Ausarbeitung eigener Programmvarianten.

Band 4: Statik – Kinematik – Kinetik für AOS-Rechner

von **Harald Nahrstedt**

Band 4 der Reihe *Anwendung programmierbarer Taschenrechner* zeigt an 30 ausgetesteten Programmen für den TI-59 den Einsatz des programmierbaren Taschenrechners für wichtige Gebiete der Technischen Mechanik. Der Verfasser gibt zu jedem einzelnen Problem eine kurze Einführung in die Theorie und erklärt dann die Aufbereitung des Programms. Es folgen Beispiele für die Entwicklung eigener Programme.

Ing. (grad.) *Harald Nahrstedt* ist Dozent an der VHS Hamm
Anwendung programmierbarer Taschenrechner,
Mikrocomputer.

ISBN 3-528-04169-2